Matemáticas 2

A través de las matemáticas

P C Manrique

Secundaria 2º

¿Sugerencias o comentarios?
¡Contáctanos!
55 5090 7700 ext. 7420
www.fernandezeditores.com.mx
www.social.adiactiva.com.mx
secundaria@fernandezeditores.com.mx
Avenida Insurgentes Sur Núm. 2453 Piso 12, Colonia Tizapán, Delegación Álvaro Obregón, C.P. 01090, Ciudad de México.

MATEMÁTICAS 2 A TRAVÉS DE LAS MATEMÁTICAS
POR P C MANRIQUE
PRIMERA EDICIÓN, SEPTIEMBRE 2018

Se contó con la participación del equipo pedagógico de Fernández educación.

ISBN: EN TRÁMITE

IMPRESO EN MÉXICO - PRINTED IN MEXICO

Para el alumno

Este libro representa una nueva manera de enseñar y aprender matemáticas. Te ayudará a explorar, descubrir y construir el conocimiento matemático a partir de tu experiencia, de lo mucho que ya sabes; permitirá que le des tu propia interpretación a lo que construyas pero sin que descuides el uso del lenguaje matemático como una herramienta de comunicación universal.

Organizadas en secuencias didácticas, las actividades que se plantean requieren que recuerdes, que comprendas, que apliques, que analices, que evalúes y, en la medida de lo posible, que crees tus propios recursos para resolver problemas, una habilidad fundamental en la sociedad moderna.

También consideran que el conocimiento se construye a partir de la colaboración e interacción con los otros, con tus compañeros, tu profesor y la comunidad escolar o en la que habitas. Por ello, se requiere que compartas y compares tus respuestas, procedimientos y propuestas con los demás. Con ello, no sólo reafirmarás y afianzarás tu conocimiento, sino que te servirá para que desarrolles habilidades, actitudes y valores como el pensamiento crítico, la escucha activa, la apertura al diálogo, la responsabilidad y la honestidad, entre otros.

Es importante mencionar que este libro busca generar un aprendizaje significativo y tu autonomía como aprendiz, es decir, con su apoyo tomarás conciencia, comprenderás conceptos matemáticos, los relacionarás e integrarás y, durante el proceso, te darás cuenta de tus errores y fallos, pero serás capaz de corregirlos.

Como una innovación, se proponen tres proyectos que puedes llevar a cabo a lo largo del ciclo escolar usando las herramientas matemáticas que aprenderás con los contenidos de este libro. El propósito de los proyectos es que te des cuenta que en verdad es posible aplicar las matemáticas para resolver problemas de la vida cotidiana.

¡Qué tengas éxito en tu proceso de aprendizaje!

El editor

Guía de uso

A continuación, te detallamos las principales características de cada elemento que le da forma y sentido a este libro para que tu proceso de aprendizaje resulte productivo.

Entrada de bloque

En estas páginas se presentan los ejes, temas y aprendizajes esperados que se abordarán durante cada secuencia didáctica. Revísalos con atención para que te des una idea de qué es lo que se espera que aprendas.

Hay tres entradas, una para cada bloque de estudio, que se ilustran con conceptos relacionados al pensamiento matemático.

Secuencias didácticas

Representan un conjunto de actividades ordenadas y relacionadas entre sí con las cuales puedes ir construyendo tu aprendizaje. Cada una está dividida en tres secciones: Emπeza, Avanza y πensa.

Emπeza

Tiene como propósito valorar los conocimientos y habilidades matemáticas con los que cuentas para que, a partir de ellos, puedas aprovechar los nuevos contenidos.

Se plantean actividades prácticas y concretas que permiten identificar el lugar desde el que partes. Toma nota de tus fallos para que repases lo necesario.

Avanza

Representa un momento fundamental para modificar y perfeccionar los conocimientos anteriores y construir los nuevos.

Propone diversas actividades interrelacionadas que, a partir de la indagación, te permitirán desarrollar la habilidad de resolver problemas y comprender los conceptos matemáticos que están en juego.

πensa

Su objetivo es verificar que los aprendizajes enunciados en la entrada del bloque se lograron.

Las actividades son diversas y te permiten integrar los saberes y habilidades que desarrollaste durante la secuencia; también te indicarán aquello que debes reforzar.

Trabajo colaborativo

Es muy importante que interactúes con los demás para que puedas confirmar y fortalecer tu aprendizaje. Por ello, en las actividades se proponen situaciones para dialogar e intercambiar opiniones, además de reflexionar sobre las estrategias de resolución usadas, aportar ideas para resolver distintos tipos de problemas, compararlas y argumentar a favor o en contra de ellas de forma convincente y clara.

Individual   Pares   Equipo

Cápsulas

Son pequeñas dosis de información que complementan los contenidos y permiten que tu aprendizaje se dé de forma integral.

Visión matemática
Te permite reflexionar, monitorear y evaluar la efectividad de tu proceso de pensamiento cuando resuelves problemas.

En concreto
Precisa y ejemplifica los nuevos conceptos y herramientas matemáticas que irás descubriendo a lo largo de las secuencias.

Corrijo y aprendo
Te permite hacer una pausa para analizar las fallas y dificultades a las que te enfrentas cuando resuelves problemas y ejercicios.

Transversalidad
Esta información y sugerencias relacionan lo que estás aprendiendo con otras asignaturas.

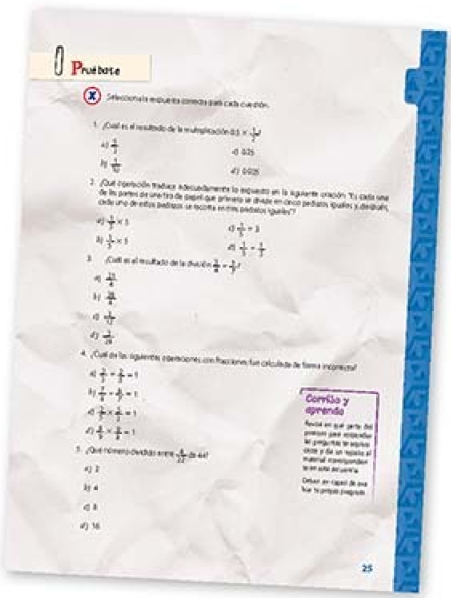
Glosario
Define términos técnicos o que pueden resultar de difícil comprensión; su objetivo es aumentar tu vocabulario general.

Biblioteca
Proporciona sugerencias bibliográficas para profundizar en ciertos temas de interés.

Enl@ce
Sugiere el uso de actividades interactivas con las cuales, además de fortalecer los contenidos matemáticos, desarrollarás tus habilidades digitales.

Evaluaciones

Posibilitan valorar la calidad del proceso de aprendizaje. Son diversas porque responden a una necesidad formativa, es decir, a la necesidad de entender cómo se desarrolla el proceso de aprendizaje y cómo orientarlo para hacer las mejoras pertinentes.


Pruébate

Pruébate

Es una evaluación sumativa que refleja el resultado de lo que aprendiste durante la secuencia didáctica, aparece al final de cada una. Asignarle un número o porcentaje de desempeño te puede ser útil para monitorear tu progreso, pero no es obligatorio.

Autoevaluación

Con ella reconocerás cuáles objetivos de aprendizaje lograste y reflexionarás cómo lo conseguiste.


Autoevaluación

Coevaluación

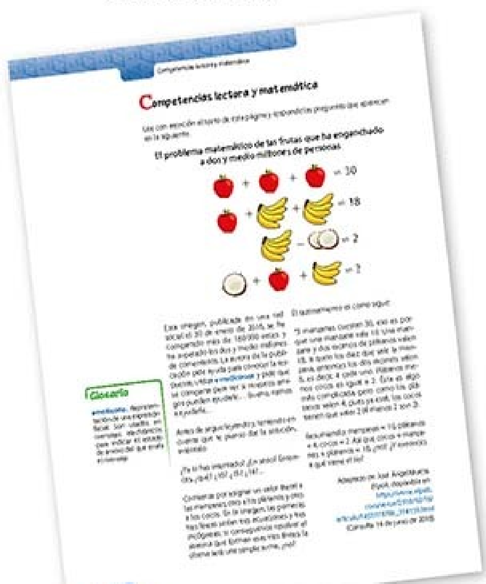
Heteroevaluación

Coevaluación y heteroevaluación

Recibirás retroalimentación de personas involucradas contigo y tu aprendizaje, razón por la cual te sentirás más implicado en el proceso y comprometido por esforzarte más.

Competencias lectora y matemática

Incluye una lectura y reactivos de opción múltiple y abiertos que ponen a prueba dos de las competencias más importantes que cualquier estudiante debe desarrollar para mejorar su proceso de aprendizaje.


Competencias lectora y matemática

Proyectos

El aprendizaje basado en proyectos (ABP) es un tipo de enseñanza activa, donde los protagonistas son ustedes, y que apuesta por que pongan en práctica el conocimiento que adquieren para que resuelvan problemáticas del entorno natural o social.

En un proyecto, deben dirigir sus esfuerzos para concretar en un producto final el resultado de una investigación profunda sobre algún tema que haya despertado su interés.

En esta propuesta se proveen las pautas necesarias para que desarrollen tres proyectos a lo largo del ciclo escolar. Se recomienda que, al iniciar cada bloque, le den un vistazo a las páginas que los detallan para que se den una idea de los temas que pueden abordar. Tomen en cuenta que los que se sugieren son sólo una de las muchas posibilidades que pueden investigar.

También es importante que en el aula, de acuerdo con las características del contexto escolar, definan el tiempo que destinarán a cada una de las actividades del proyecto. Establezcan fechas límite para presentar avances y plantear dudas respecto al tema que están investigando. Es necesario que respeten lo establecido, pues sólo así adquirirán actitudes y valores como la responsabilidad, el compromiso y la perseverancia, entre otros.

Las cuatro etapas en las que se han dividido los proyectos se describen a continuación:

Planeación

Aquí se requiere delimitar el tema del proyecto y definir su propósito. También deben organizar y planificar las actividades que hay que llevar a cabo, así como gestionar los recursos materiales y financieros con los que cuentan. Cabe aclarar que los productos finales que se proponen en cada proyecto no requieren materiales costosos para su elaboración y las herramientas tecnológicas que se mencionan sólo son recomendaciones, por lo que en ningún caso el desarrollo del proyecto está sujeto a restricciones.

Desarrollo

Durante esta etapa, entran en acción y realizan diversas actividades con el fin de hacer acopio de información que deben procesar y analizar con los conceptos y herramientas matemáticos abordados en las secuencias didácticas.

Comunicación

Para que el proyecto cobre sentido, deben compartir los resultados con los otros, la comunidad escolar o la localidad en la que viven. Se propone que los expongan usando distintas herramientas como periódicos murales, videos, infografías, etc. Además, deben elaborar un informe por escrito que dé cuenta del trabajo realizado.

Evaluación

Aquí se dan sugerencias de un producto final que pueden desarrollar y para el cual deben integrar conocimientos, habilidades, actitudes y valores que han desarrollado en el aula y durante el trabajo colaborativo de investigación. Es muy importante que durante esta etapa evalúen no sólo los productos que generaron sino también el proceso que siguieron. Es momento de que valoren los logros, así como que reconozcan los retos y dificultades a los que se enfrentaron y superaron.

Índice

Bloque 1

Eje Número, álgebra y variación

Tema: Multiplicación y división
Aprendizaje esperados

- Resuelve problemas de multiplicación y división con fracciones y decimales positivos.
- Resuelve problemas de multiplicación y división con números enteros, fracciones y decimales positivos y negativos.
- Resuelve problemas de potencias con exponente entero y aproxima raíces cuadradas.

Tema: Proporcionalidad
Aprendizaje esperado:

- Resuelve problemas de proporcionalidad directa e inversa de reparto proporcional.

Tema: Ecuaciones
Aprendizajes esperados:

- Resuelve problemas mediante la formulación y solución algebraica de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Emplea los conceptos matemáticos de este bloque para desarrollar un proyecto que aborda las aplicaciones y riesgos de la tecnología.

Resuelve problemas de multiplicación y división con fracciones y decimales positivos

Empieza

Antes de iniciar con los nuevos aprendizajes, recuerda algunos conocimientos que ya tienes de cursos anteriores. Realiza en tu cuaderno las siguientes actividades y compara tus respuestas con un compañero. Si encuentran errores, coméntenlos y realicen las correcciones necesarias.

a) Escribe dos fracciones cuyo **producto** sea $\frac{1}{4}$.

b) Resuelve las siguientes multiplicaciones de fracciones de acuerdo con el procedimiento que prefieras y simplifica, si es posible.

$\frac{1}{4} \times \frac{8}{3} =$

$\frac{12}{11} \times \frac{13}{17} =$

$6\frac{3}{5} \times \frac{2}{9} =$

$3\frac{3}{7} \times 5\frac{7}{3} =$

c) ¿Cuánto líquido hay en 28 recipientes de la misma **capacidad** como el que se muestra a continuación?

d) De acuerdo con la siguiente tabla, que está expuesta en la ventanilla de un banco.

	Dólar americano	Euro
Compra	\$18.90	\$22.85
Venta	\$19.70	\$23.50

¿Cuántos dólares se obtienen con \$2535.30?, y ¿cuántos euros se obtienen con el doble del monto anterior?

Visión matemática

¿Cuál de los procedimientos que conoces para multiplicar números fraccionarios te parece el más eficiente? ¿Por qué?

Glosario

capacidad. Se refiere al espacio interior de un recipiente en el que se contiene algo, generalmente un líquido. La unidad de medida es el litro.

producto. En matemáticas, es el resultado de una multiplicacion.

Avanza

Multiplicación de fracciones

En el grado anterior aprendiste las operaciones con fracciones y probablemente te habrás percatado de que, a diferencia de la suma o resta, la multiplicación es muy sencilla de efectuar. En esta secuencia resolverás problemas de multiplicación con fracciones y decimales y aprenderás la división con fracciones.

Consideren los siguientes productos:

$\frac{1}{2} \times 2$ $\frac{1}{3} \times 3$ $\frac{1}{4} \times 4$ $\frac{1}{5} \times 5$

$\frac{1}{6} \times 6$ $\frac{1}{7} \times 7$ $\frac{1}{8} \times 8$ $\frac{1}{9} \times 9$

Realicen lo que se solicita.

a) Expliquen de forma oral la formación de los productos.
b) ¿Son multiplicaciones de dos números fraccionarios? Resuélvanlas y justifiquen su respuesta.
c) Argumenten que en cada producto aparecen inversos multiplicativos.
d) Consideren la fracción $\frac{2}{3}$, ¿cuál es su inverso multiplicativo?, ¿dicho número es único? Justifiquen su respuesta.

Comparen sus respuestas con otras parejas y, en conjunto, determinen las características que deben tener dos números fraccionarios para que cumplan la propiedad que apreciaron en esta actividad.

Utilicen material reciclado como papel o cartón y elaboren tarjetas, escriban en cada una de ellas un número fraccionario y jueguen memorama de fracciones recíprocas, en el que el objetivo es juntar pares de tarjetas que tienen números recíprocos entre sí. Por ejemplo, siguientes tarjetas forman pares correctos:

$2\frac{1}{5}$ $\frac{9}{5}$

$\frac{5}{11}$ $\frac{5}{9}$

Gana quien junte más pares de tarjetas.

Glosario

factor. Cada uno de los elementos de una multiplicación.

$6 \times 5 = 30$

Factor Factor Producto

En concreto

El *inverso multiplicativo* de un número es otro número tal que, cuando ambos se multiplican, el resultado es 1.

Por ejemplo:

3 y $\frac{1}{3}$ son inversos multiplicativos porque $3 \times \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1$.

$\frac{8}{7}$ es el inverso multiplicativo de $\frac{7}{8}$, y viceversa, porque $\frac{7}{8} \times \frac{8}{7} = \frac{7}{7} \times \frac{8}{8} = 1 \times 1 = 1$.

También se les conoce como *fracciones recíprocas* o *fracciones inversas* a aquéllas que tienen la propiedad de que al multiplicarse por pares, su resultado es 1.

Por ejemplo:

$$\frac{3}{4} \times \frac{4}{3} = 1$$

$$\frac{2}{3} \times \frac{6}{4} = 1$$

Nota que en el segundo ejemplo, la fracción $\frac{6}{4}$ no está simplificada.

Fracciones y decimales

En algunas ocasiones, es necesario multiplicar no sólo fracciones, sino también fracciones por decimales. Considera las siguientes operaciones y responde lo que se te solicita.

$\frac{8}{10} \times 1.5$ $\quad 0.8 \times \frac{3}{2}$ $\quad \frac{8}{10} \times \frac{3}{2}$ $\quad 0.8 \times 1.5$

a) ¿Cuáles son las semejanzas y diferencias entre estas operaciones planteadas?
b) ¿Cuál puedes calcular con total seguridad?, ¿por qué?
c) ¿Qué es más fácil, multiplicar fracciones o decimales? Justifica tu respuesta.
d) ¿Existe alguna otra combinación de números que represente el mismo producto? Justifica tu respuesta.

Efectúa sólo aquellas operaciones que estés seguro de su resultado, durante el desarrollo de esta lección podrás construir los conocimientos necesarios para resolverlas todas.

Visión matemática

¿Alguna de las operaciones a la derecha te causa duda o te confunde?, ¿por qué?

En la siguiente tabla, multipliquen los números que se encuentran en el mismo renglón, cada uno puede elegir la columna que quiera completar, o pueden alternarse llenando los espacios.

Número decimal	Fracción	Resultado en forma decimal	Resultado en forma fraccionaria
0.92	$\frac{1}{5}$		
1.75	$2\frac{1}{2}$		
3.5	$\frac{4}{5}$		
9.7	$1\frac{3}{2}$		

Comenten entre ustedes qué les pareció más complicado, si expresar los resultados en forma decimal o en forma de fracción. En su cuaderno pueden realizar una tabla semejante para practicar con ejercicios que propongan. Además, planteen problemas que involucren las multiplicaciones que acaban de resolver, intercambien sus problemas con otras parejas y traten de resolverlos usando diferentes procedimientos.

Resolución de problemas

Lee atentamente la siguiente situación y responde las preguntas que se plantean.

Alejandra es **nutrióloga**. Su labor consiste en ofrecer a sus pacientes recomendaciones alimenticias para mejorar su salud. Para hacerlo adecuadamente debe analizar tablas como la siguiente, en la que se presenta de manera ordenada la cantidad sugerida de los alimentos, la unidad de medida, el peso aproximado en gramos (g) y los contenidos de **macronutrientes** que aportan.

Alimento	Cantidad sugerida	Unidad de medida	Peso aproximado (g)	Proteínas (g)	Lípidos (g)	Hidratos de carbono (g)
Calabacita	1	pieza	90	1.6	0.1	3.4
Ejote	$\frac{1}{2}$	taza	65	1.2	0.2	4.9
Jitomate	2	pieza	130	1.1	0.2	4.8
Lechuga	3	taza	135	1.7	0.4	4.5
Nopal	1	taza	150	2	0.1	4.9
Zanahoria	$\frac{1}{2}$	taza	55	0.5	0.1	4.1
Guayaba	3	pieza	135	1	0.7	14.8
Mango	$\frac{1}{2}$	pieza	95	0.3	0.2	10.5
Manzana	1	pieza	140	0.3	0.2	14.7
Naranja	2	pieza	240	1.7	0.5	19.1
Plátano	$\frac{1}{2}$	pieza	80	0.6	0.2	12.4
Sandía	1	taza	160	1	0.2	12.1

a) ¿Cuál consideras que es la fruta o verdura más **nutritiva** y por qué?
b) ¿Cuántos gramos de hidratos de carbono obtiene alguien que consume 5 guayabas?
c) ¿Cuántas piezas de jitomate debes consumir para obtener 1 g de lípidos?
d) ¿Cuál es el peso aproximado de $\frac{3}{4}$ de taza de zanahoria?
e) Si alguien consume $1\frac{1}{2}$ piezas de plátano, ¿cuánta proteína obtendrá?
f) ¿Qué cantidad de proteínas, lípidos e hidratos de carbono se obtiene al consumir una taza de lechuga?

Reúnete con un compañero, comparen sus procedimientos y sus resultados, y expongan sus ideas sobre el tipo de operaciones que se requieren para resolver lo planteado aquí.

Glosario

nutriólogo. Es el profesional encargado de diagnosticar, tratar y vigilar el estado nutricional de todas las personas, sanas o enfermas.

nutritivo. Que posee las sustancias necesarias para nutrir o alimentar.

macronutrientes. Son sustancias como hidratos de carbono, lípidos y proteínas, que aportan las calorías (energía) necesarias para que los seres vivos realicen funciones vitales como el crecimiento y la respiración.

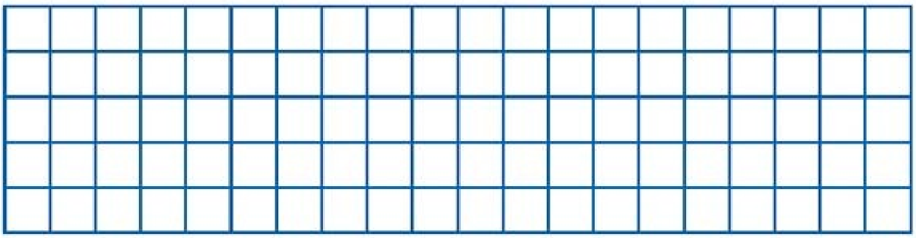
Transversalidad

El tema de alimentación y nutrición se aborda en la asignatura de Ciencias. El profesor responsable te puede orientar al respecto, aunque no descartes la visita con un nutriólogo si consideras necesario controlar alguna enfermedad como la obesidad.

Analicen lo siguiente y respondan lo que se solicita.

Raúl tiene un taller mecánico que mide 5 metros (m) de ancho y 20 m de largo. Del total de la superficie del taller, Raúl dedica $\frac{3}{20}$ partes a la zona de su oficina, $\frac{2}{5}$ a la zona de almacén y el resto a la zona de reparaciones. Su hermano Juan tiene otro taller con las mismas divisiones de espacio y con la misma superficie pero de forma cuadrada.

a) En la siguiente ilustración, con color rojo dibujen la parte que corresponde a la zona de la oficina; de azul, la zona de almacén; y de gris, la zona de reparaciones.



Visión matemática

Te puede ser útil representar de forma gráfica las condiciones de un problema para tratar de resolverlo.

b) ¿Cuál es la superficie en metros cuadrados que representa cada uno de los cuadritos en la ilustración anterior? Determinen el número de metros cuadrados que Raúl destina a la oficina, al almacén y a la zona de reparaciones.

c) Repitan lo hecho en los incisos ***a***) y ***b***) para el caso del taller de Juan pero en este caso deben usar números decimales para plantear las condiciones y la solución del problema.

d) Durante una semana en su taller, Raúl reparó cierta cantidad de automóviles: el lunes reparó una cuarta parte del total; el martes y miércoles reparó dos terceras partes del total de coches; y durante el jueves y viernes reparó 9 autos. Utiliza el siguiente espacio para determinar el número total de autos que reparó durante la semana.

Comparen sus resultados y procedimientos con el resto del grupo. Analicen las ventajas de operar con decimales o con fracciones en la resolución de problemas.

¿La multiplicación?

Responde lo que se solicita:

***a*)** Si en tres bolsas repartes 24 dulces de tal manera que en cada una de ellas haya un tercio del total, ¿qué operación debes realizar para saber cuántos dulces quedarán en cada bolsa?

***b*)** Si repartes 24 dulces en tres bolsas de tal manera que en cada una de ellas haya la misma cantidad de dulces, ¿qué operación debes realizar para saber cuántos dulces habrá en cada bolsa?

c*)** Si tuvieras que usar el lenguaje matemático para interpretar el enunciado del inciso ***a), ¿cómo lo harías?

d*)** ¿Cómo se representa lo expresado en el enunciado del inciso ***b) usando el lenguaje matemático? Justifica tu respuesta.

Haz explícito el uso de las operaciones con las que puedes resolver la situación y determina porqué hay una estrecha relación entre ellas.

Consideren las siguientes situaciones y den respuesta a lo que se solicita:

Una olla se llena colocando en ella 9 botellas de agua de $\frac{1}{2}$ L cada una, si el agua de la olla ha de repartirse en vasos de $\frac{1}{3}$ L, ¿cuántos vasos se llenan? O la pregunta equivalente: ¿cuántas veces cabe el contenido de un vaso en la olla?

Alfredo tiene un bote de $3\frac{1}{2}$ L de pintura y quiere llenar botecitos de $\frac{3}{4}$ L. ¿Cuántos botecitos podrá llenar por completo?

***a*)** Nombren una similitud y una diferencia entre ambas situaciones.

***b*)** ¿Cómo resolverían lo planteado en la primera situación? Justifiquen sus procedimientos.

***c*)** ¿Qué debe hacer Alfredo?, ¿por qué?

***d*)** ¿Se te ocurre usar algún esquema o apoyo visual para tratar de entender las situaciones?, ¿cuál es? Dibújalo en tu cuaderno.

***e*)** ¿Cómo están relacionadas ambas situaciones con la actividad anterior?

Compartan con otras parejas los procedimientos que pensaron que pueden resolver el problema, no es necesario dar una respuesta, más adelante podrán resolver ambas situaciones.

Visión matemática

La idea de qué operación se debe usar para resolver un problema es un tanto simplista, pues parece que los problemas se resuelven con una sola operación. No obstante, cualquier idea que encienda la chispa del pensamiento crítico es útil para resolver problemas.

En concreto

Para abreviar la unidad de medida litros es común usar *l*, pero debido a que puede confundirse con el número 1, en este libro se utiliza L.

División de fracciones

Visión matemática

Recuerda que la división permite comparar dos cantidades, el divisor y el dividendo. Al efectuar una división se puede pensar en cuántas veces cabe el divisor en el dividendo.

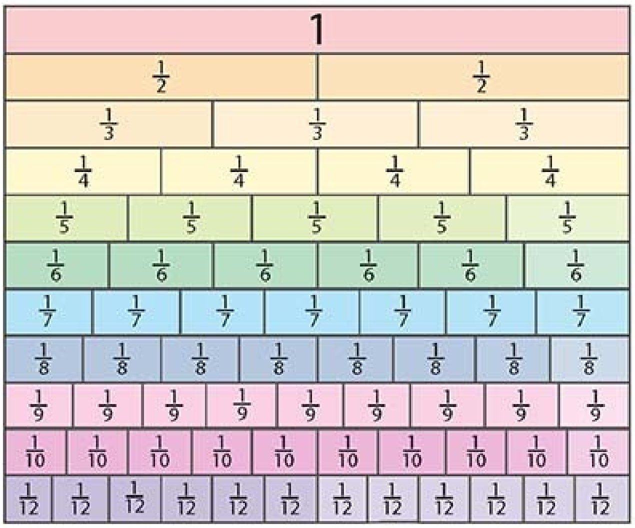
En concreto

El *fraccionómetro* es utilizado como material didáctico para enseñar diversos temas relacionados con las fracciones: se puede hacer con papel, plástico o madera.

La tira más larga, la roja de la ilustración del fraccionómetro a la derecha, representa una unidad y es llamada *tira unidad*. A partir de ella se realiza un fraccionamiento de las otras. Por ejemplo, las tiras amarillas representan la fracción $\frac{1}{4}$ porque cada una mide un cuarto de la tira roja.

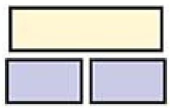
Es recomendable que construyas tu propio fraccionómetro.

X Observa el fraccionómetro que se muestra a continuación.



Considera el siguiente ejemplo:

Para resolver la operación $\frac{1}{4} \div \frac{1}{8}$ me puedo preguntar: ¿cuántas veces cabe una tira azul marino que representa $\frac{1}{8}$ en una tira amarilla que representa $\frac{1}{4}$? Al comparar los tamaños observo que dos tiras azul marino caben o se enciman en la tira amarilla, por lo tanto $\frac{1}{4} \div \frac{1}{8} = 2$.



a) Completa la tabla escribiendo la traducción, la operación y su resultado. Guíate con los ejemplos.

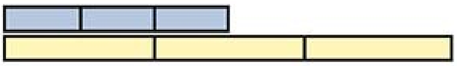
Dividendo	Divisor	Traducción	Operación y resultado
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	¿Cuántas veces cabe un octavo en un cuarto?	$\frac{1}{4} \div \frac{1}{8} = 2$
$\frac{6}{8}$	$\frac{3}{4}$	¿Cuántas veces caben tres cuartos en seis octavos?	$\frac{6}{8} \div \frac{3}{4} = 1$
$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{9}$		
$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{5}$		
$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{9}$		
$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{12}$		

b) Realiza esquemas para representar otras divisiones y muéstraselos a tus compañeros. Reflexiona sobre por qué es importante, para comprender mejor este tema, representar de manera gráfica la división de una fracción entre otra fracción.

Reúnete con un compañero para identificar la característica que tienen en común las divisiones que efectuaron en el inciso a).

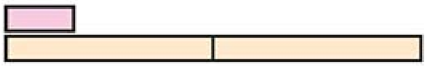
Reproduzcan el fraccionómetro de la página anterior en papel reciclado. Pueden ampliarlo para facilitar las actividades que realizarán a continuación.

a) Consideren la división $\frac{3}{8} \div \frac{3}{4}$, la cual se representa gráficamente a continuación:

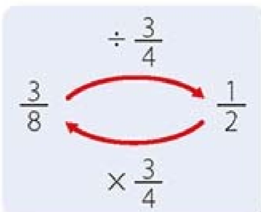


Observen que $\frac{3}{4}$ se excede y no cabe una vez completa en $\frac{3}{8}$. Justifiquen $\frac{3}{8} \div \frac{3}{4} = 12$

b) ¿Cuál es la división que se representa a continuación y cuál es el resultado?



c) Recuerden que para comprobar una división se utiliza la multiplicación. Por ejemplo, si $\frac{3}{8} \div \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$, entonces $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$. Observen el siguiente esquema:



Usando la información anterior, conviertan las siguientes divisiones en multiplicaciones en las que un factor es desconocido y encuentren el resultado de las operaciones.

$\frac{9}{8} \div \frac{3}{4}$ $\quad$ $\frac{20}{24} \div \frac{5}{8}$ $\quad$ $\frac{60}{30} \div \frac{12}{15}$ $\quad$ $2\frac{2}{27} \div 3\frac{1}{9}$

Expliquen cómo pueden relacionar ambas operaciones, × y ÷, para efectuar cálculos entre fracciones que involucren a la multiplicación y a la división. Tomen las notas que consideren más relevantes para que las comparen con el resultado de la siguiente actividad.

En concreto

Los elementos de una división se muestran en el siguiente ejemplo:

Para comprobar que una división sin residuo, está bien hecha, se debe verificar lo siguiente:

cociente × divisor = dividendo

En el ejemplo anterior:

$14 \times 7 = 98$

Consideren las siguientes multiplicaciones y divisiones de fracciones y den respuesta a lo que se solicita.

$\frac{1}{5} \times \frac{1}{2}$	$\frac{1}{5} \div 2$
$\frac{1}{6} \times \frac{1}{3}$	$\frac{1}{6} \div 3$
$\frac{5}{10} \times \frac{1}{4}$	$\frac{5}{10} \div 4$
$\frac{2}{3} \times \frac{1}{5}$	$\frac{2}{3} \div 5$
$\frac{3}{4} \times \frac{1}{6}$	$\frac{3}{4} \div 6$

a) ¿En cuál columna pueden calcular los resultados con lo que ya saben?, ¿por qué? Anoten los resultados en su cuaderno.

b) ¿Encuentran alguna relación entre ambas columnas?, ¿cuál es?

c) Reproduzcan y completen la siguiente tabla en sus cuadernos. Guíense por el ejemplo y denle sentido a lo que se presenta.

La fracción…	tiene por recíproco a…	Por lo tanto, multiplicar por…	Equivale a dividir entre …
$\frac{1}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	2

d) Justifiquen que para dividir dos fracciones se puede seguir cualquiera de los siguientes procedimientos.

Procedimiento 1	Procedimiento 2
Multiplicar por el inverso multiplicativo del divisor.	Multiplicar de forma cruzada.
$\frac{2}{3} \div \frac{7}{5} \Rightarrow \frac{2}{3} \times \frac{5}{7} = \frac{10}{21}$	$\frac{2}{3} \div \frac{7}{5} = \frac{10}{21}$

Pongan a prueba ambos procedimientos resolviendo más ejercicios. No olviden destacar las ventajas de aquél que consideren más práctico.

Lee con atención la siguiente situación y da respuesta a lo que se te solicita.

A través de una campaña de donación se recolectaron las siguientes cantidades de recursos:

- 80 sacos de croquetas para perro de 20.2 kg cada uno y 55 bolsas de croquetas para gato de 3.18 kg
- 3 125 latas de las cuales 1 890 son alimento para gato y 1 235 alimento para perro.
- 284.5 kg de arena para gato
- 112 huesos de carnaza, 280 cascabeles y 80 ratones de juguete
- 800 platos para alimentos
- 120 jaulas de las cuales $\frac{11}{15}$ son para perros y las restantes para gatos
- 138 correas para perros

Considera que, en la ciudad en la que se realizó el acopio, los recursos se deben repartir en 20 refugios en los que, en promedio, en cada uno, hay 15 perros y 10 gatos.

a) ¿Qué operaciones debes realizar para calcular la cantidad de croquetas que recibirá cada refugio y, en promedio, cada perro? Haz los cálculos y anota la respuesta.

b) Divide la cantidad de alimento enlatado para gatos entre el total de gatos que están en los refugios, ¿tiene sentido el resultado?, ¿por qué?

c) ¿Qué cantidad de huesos, cascabeles y ratones les tocará a cada refugio? ¿El resultado puede expresarse en fracciones o decimales?, ¿por qué?

d) ¿Cuál es la forma más adecuada de repartir los platos para alimento en los refugios?, ¿qué cantidad recibiría cada uno de ellos?

e) Considerando que las correas para perros se utilizan en el momento en el que uno de ellos es adoptado, ¿qué porcentaje de perros podría recibir una correa al momento de ser adoptado?

Realiza todas las operaciones que consideres necesarias y establece las cantidades de recursos que cada refugio y cada animal recibirían, además determina cuáles de ellos son insuficientes para cubrir la demanda en la ciudad. Toma conciencia del tema y, si está en tus manos, apoya en este tipo de causas.

Corrijo y aprendo

Es necesario practicar para adquirir soltura en cálculos que involucran fracciones y números decimales; para ello accede a la siguiente dirección https://www.thatquiz.org/es-3/matematicas/fraccion/ y realiza el test. En la parte superior izquierda con la lista desplegable "Largo", puedes modificar la cantidad de ejercicios, después selecciona el nivel de dificultad de 1 a 50 y establece un tiempo límite para responder de hasta 30 minutos. Marca las casillas correspondientes a "Multiplicar" y "Dividir", "Fracciones", "Fracción mixta", "Decimales" y "Términos reducidos" o las que prefieras para darle dinamismo y variedad al test.

Al final se presenta tu resultado. Corrige las respuestas incorrectas en tu cuaderno.

Transversalidad

¿Por qué son necesarios los juguetes en un refugio de animales? Consulta con tu maestro de Formación Cívica y Ética cuáles normas o leyes protegen los derechos de los animales en México.

πensa

Para concluir e integrar lo abordado en esta lección realiza en tu cuaderno las siguientes actividades de forma individual.

a) Para preparar una pieza de pan de muerto de 1 kg, la Procuraduría Federal del Consumidor (PROFECO) proporciona la siguiente lista de ingredientes:

- $3\frac{1}{2}$ tazas de harina de trigo
- $\frac{1}{2}$ taza de margarina
- 3 huevos
- $1\frac{1}{4}$ tazas de azúcar
- 2 cucharadas de ralladura de cáscara de naranja
- 2 sobrecitos de levadura
- 7 yemas de huevo
- 100 g de manteca vegetal
- $\frac{1}{4}$ de cucharadita de sal
- 2 cucharadas de té de anís (preparado)
- 3 cucharadas de té de azahar (preparado)
- $\frac{1}{2}$ taza de agua hervida, purificada o clorada

Si un ama de casa desea preparar una pieza de pan de muerto de 500 gramos, ¿qué cantidad de cada ingrediente necesita?

b) ¿Qué error (o errores) se ha cometido en el siguiente cálculo? Explícalo y corrígelo.

$$\frac{8}{5} \times 3.5 = 1\frac{3}{5} \times 3\frac{1}{2} = 3\frac{3}{10}$$

c) Analiza por qué los siguientes enunciados son equivalentes y escribe en tu cuaderno dos ejemplos similares.

- Las dos terceras partes de tres medios
- El recíproco de tres medios por tres medios

De forma grupal, hagan una breve reflexión sobre lo que aprendieron y las dificultades a las que se enfrentaron, manifiesten las dudas que aún conservan y con ayuda de su profesor traten de esclarecerlas. Por último, a modo de resumen, escriban en el pizarrón y después en sus cuadernos las ideas principales de los temas expuestos.

Enl@ce

Ingresa a la dirección **http://ntic.educacion.es/w3/recursos/primaria/matematicas/fracciones/menuu6.html** para que practiques diferentes temas relacionados con las fracciones, en particular la multiplicación y división.

Pruébate

Selecciona la respuesta correcta para cada cuestión.

1. ¿Cuál es el resultado de la multiplicación $0.5 \times \frac{1}{2}$?

   a) $\frac{5}{2}$
   b) $\frac{1}{10}$
   c) 0.25
   d) 0.025

2. ¿Qué operación traduce adecuadamente lo expuesto en la siguiente oración: "Es cada una de las partes de una tira de papel que primero se divide en cinco pedazos iguales y, después, cada uno de estos pedazos se recorta en tres pedazos iguales"?

   a) $\frac{1}{3} \times 5$
   b) $\frac{1}{5} \times 5$
   c) $\frac{1}{5} \div 3$
   d) $\frac{1}{5} \div \frac{1}{3}$

3. ¿Cuál es el resultado de la división $\frac{3}{4} \div \frac{1}{7}$?

   a) $\frac{21}{4}$
   b) $\frac{28}{4}$
   c) $\frac{3}{12}$
   d) $\frac{3}{28}$

4. ¿Cuál de las siguientes operaciones con fracciones fue calculada de forma incorrecta?

   a) $\frac{2}{3} \div \frac{2}{3} = 1$
   b) $\frac{7}{8} \div \frac{8}{7} = 1$
   c) $\frac{2}{5} \times \frac{5}{2} = 1$
   d) $\frac{8}{9} \times \frac{9}{8} = 1$

5. ¿Qué número dividido entre $\frac{4}{22}$ da 44?

   a) 2
   b) 4
   c) 8
   d) 16

Corrijo y aprendo

Revisa en qué parte del proceso para responder las preguntas te equivocaste y da un repaso al material correspondiente en esta secuencia.

Debes ser capaz de evaluar tu propio progreso.

Resuelve problemas de multiplicación y división con números enteros, fracciones y decimales positivos y negativos

Emπeza

Reactiva tus conocimientos sobre las operaciones con números enteros y fracciones que adquiriste con anterioridad. Resuelve lo que se te solicita en cada caso.

a) Escribe el resultado de la operación $(-3) + (-3) + (-3) + (-3)$.

b) Encierra en un recuadro la operación que está resuelta de forma correcta.

$\frac{12}{15} \times \frac{1}{6} = \frac{12}{80}$ $\qquad$ $\frac{2}{3} \times \frac{18}{20} = \frac{3}{5}$

$\frac{5}{3} \times 14 = \frac{70}{42}$ $\qquad$ $\frac{15}{100} \times \frac{10}{15} = 1$

c) ¿A cuánto equivalen las cuatro quintas partes de las tres cuartas partes de 120?

d) En el espacio correspondiente, proporciona un ejemplo de la operación que se te solicita y resuélvelo.

Una división en la que el dividendo sea menor que el divisor.	Una división en la que el dividendo tiene más cifras decimales que el divisor.
Una división en la que el dividendo y el divisor tienen la misma cantidad de cifras decimales.	Una división en la que el cociente es mayor que el dividendo.

Avanza

Multiplicaciones y sucesiones

X Es seguro que ya conoces la tabla del 5 y la has practicado en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} &\vdots \\ 5 \times 1 &= 5 \\ 5 \times 2 &= 10 \\ 5 \times 3 &= 15 \\ 5 \times 4 &= 20 \\ 5 \times 5 &= 25 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Responde lo que se solicita a continuación.

a) ¿Cuál de los dos factores en la multiplicación es variable?
b) ¿Cómo cambia el producto en multiplicaciones consecutivas?
c) ¿Cuál es el siguiente renglón en la tabla de multiplicar?
d) ¿Cuál sería el renglón anterior al primero?
e) Continuando con la lista, ¿cuál es el resultado del renglón 18?

Justifica frente a un compañero todas tus respuestas y en conjunto determinen cuál es el patrón o regularidad que observan en la tabla de multiplicar. Con base en ello, definan cuáles sucesiones de números se generan a partir de ella.

Visión matemática

¿Y tú cómo aprendiste las tablas de multiplicar?, ¿las memorizaste o notaste algún patrón en ellas?

XX Ahora consideren una extensión de la tabla de multiplicar anterior.

$$\begin{aligned} &\vdots \\ 5 \times -2 &= \ ? \\ 5 \times -1 &= \ ? \\ 5 \times 0 &= \ 0 \\ 5 \times 1 &= \ 5 \\ 5 \times 2 &= 10 \\ 5 \times 3 &= 15 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Den respuesta a las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál es el valor de la multiplicación $5 \times (-1)$?, ¿por qué?
b) ¿Cuál es el valor de $5 \times (-2)$?, ¿por qué?
c) ¿Cuál sería la tabla de multiplicar 5 por números negativos? Escríbanla en su cuaderno.

Seleccionen una pareja, representante del grupo, para que pase al pizarrón a escribir la tabla de multiplicar extendida y con ella validen las respuestas.

Visión matemática

Si $5 \times 2 = 2 \times 5$, ¿se cumplirá que $5 \times (-2) = (-2) \times 5$?, ¿por qué? ¿Qué nombre recibe esta propiedad de la multiplicación?

Recuerda que para distinguir a los números enteros se utilizan los paréntesis.

Por ejemplo:

$(-5) + (6) = 1$
$(-3) + (1) = -2$

Consideren las siguientes multiplicaciones:

$(-6) \times 4 =$ $(-8) \times 2 =$ $(-3) \times 9 =$ $(-1) \times 5 =$

En cada equipo, intercambien opiniones sobre cada uno de los siguientes puntos que se plantean.

a) ¿Cuál es la diferencia entre estos productos y los que se expusieron en la página anterior?
b) ¿Qué pasa cuando el primer factor es negativo?, ¿afecta esto al resultado?
c) ¿Es necesario hacer uso de las tablas de multiplicación extendidas para encontrar la respuesta?, ¿las tablas son útiles en este caso?

De forma ordenada intercambien sus respuestas con los demás equipos. Luego, de forma grupal, escriban un enunciado que indique cómo se realiza la multiplicación de un número positivo por uno negativo o viceversa.

En concreto

La *propiedad conmutativa* de la multiplicación establece que al cambiar el orden de los factores, el producto no se altera.

Por ejemplo:

$$8 \times 7 = 7 \times 8 = 56$$

En general, si a y b son números enteros, decimales o fracciones, positivos o negativos, se cumple que:

$$ab = ba$$

Tal vez no encontraron difícil realizar multiplicaciones donde sólo uno de los factores es negativo, pero es muy probable que haya surgido la inquietud de realizar el producto cuando ambos factores son negativos.

Analiza los siguientes listados y realiza lo que se te solicita.

$(+6) \times (+4) =$ 24	$(-3) \times (+6) =$ ☐
$(+6) \times (+3) =$ 18	$(-3) \times (+5) =$ ☐
$(+6) \times (+2) =$ 12	$(-3) \times (+4) =$ ☐
$(+6) \times (+1) =$ 6	$(-3) \times (+3) =$ ☐
$(+6) \times (\ \ 0) =$ 0	$(-3) \times (+2) =$ ☐
$(+6) \times (-1) =$ ☐	$(-3) \times (+1) =$ ☐
$(+6) \times (-2) =$ ☐	$(-3) \times (\ \ 0) =$ 0
$(+6) \times (-3) =$ ☐	$(-3) \times (-1) =$ ☐

a) Observa la regularidad en la formación de los productos en la lista de la izquierda, y determina el valor de los productos restantes.
b) Usa la propiedad conmutativa de la multiplicación y haz la conexión entre el último resultado de la primera lista y el inicio de la segunda.
c) Completa la segunda lista.
d) Con base en el último resultado de la segunda lista, responde: ¿el producto es positivo, negativo o neutro cuando los dos factores son negativos?

Compara tus respuestas con las de un compañero, realicen listados similares a los mostrados y, con base en las regularidades observadas, obtengan una conclusión sobre cómo debe ser el producto (positivo, negativo o neutro) dependiendo de los factores.

Visión matemática

Recuerda que para distinguir los números enteros se utilizan los paréntesis, por lo que $6 \times 4 = (+6) \times (+4)$.

Lean con atención la siguiente situación y respondan lo que se solicita.

Joaquín contaba con cierta cantidad de dinero hace diez semanas, pero cada semana ocupa \$32 de esa cantidad para comprar material escolar.

a) ¿Qué podrían calcular, lo que tenía ahorrado al principio o lo que ha gastado hasta el momento?, ¿por qué?
b) ¿Se puede saber cuánto dinero tenía ahorrado al principio? Si tu respuesta es afirmativa, calcúlalo; en caso contrario, determina cómo se puede representar esa cantidad inicial.
c) ¿Cuánto dinero ha gastado Joaquín en la primera semana?, ¿y en la segunda?, ¿en la tercera? Formulen una expresión algebraica de una sucesión que indique el gasto de Joaquín en la semana n.
d) Consideren una cantidad inicial de \$1 100, ¿con qué cantidad de dinero contaba Joaquín hace cinco semanas?
e) ¿Después de cuántas semanas Joaquín habrá gastado por completo un monto inicial de \$500?, ¿gastará ese monto de forma exacta o caerá en deuda?

Comparen con otras parejas sus respuestas y expliquen qué papel juega en esta situación la multiplicación de números enteros.

Visión matemática

Para resolver la situación de Joaquín, ¿te podría ser útil una tabla de datos?

El costo de un refresco de 600 mL es de \$12, por lo que María, quien diariamente consume uno, ha decidido dejar de comprarlo y ha optado por beber agua potable.

a) ¿Con qué número y signo se puede representar lo que gasta María en un refresco?
b) ¿Se puede formular una expresión algebraica para expresar el beneficio económico que le reporta a María no consumir refresco diariamente?, ¿qué sentido tendría la multiplicación de números enteros en este caso?
c) ¿Qué similitudes y diferencias encuentras con el problema anterior? Justifica tu respuesta.
d) En tu experiencia, ¿ahorras dinero cuando dejas de consumir un producto? Explica.

Comparte tus respuestas con un compañero y formulen otras situaciones en las que pueda tener sentido la multiplicación de dos números enteros negativos.

Visión matemática

¿Qué beneficios, además de los económicos, se pueden obtener por dejar de consumir productos como refrescos, papitas o dulces? Investiga al respecto y comparte la información con la comunidad escolar mediante algún volante o folleto.

Para practicar, resuelve las siguientes multiplicaciones de números enteros.

a) $(-12) \times (+10)$
b) $(-21) \times (-3)$
c) $(+25) \times (-18)$
d) $(+16) \times (+14)$

Reúnete con un compañero para validar los resultados y en conjunto concluyan sobre cómo es el producto de dos números positivos, positivo por negativo, negativo por positivo y dos negativos.

Corrijo y aprendo

Es común equivocarse al multiplicar números enteros. El error puede deberse a la manipulación de los signos, al uso del algoritmo de la multiplicación, o simplemente a un descuido. Verifica cuál es el caso y úsalo como fuente de aprendizaje.

La multiplicación de más de dos números enteros

Una vez que has dominado la multiplicación de dos números enteros, el siguiente paso es considerar más factores en la multiplicación.

En concreto

Dado un número entero, su *valor absoluto* se define como la distancia que guarda el número con respecto al cero. Ya que indica una distancia, el valor absoluto de todo número es positivo o cero.

Para indicar el valor absoluto de un número, éste se encierra entre dos rayas verticales.

Por ejemplo:

$|+6| = 6$

$|-11| = 11$

$|0| = 0$

Consideren los siguientes productos:

$(+2)(-3)(+4)$ $(-2)(+3)(-4)$

Den respuesta a los siguientes planteamientos.

a) Establezcan una semejanza y una diferencia entre los productos anteriores.
b) Consideren el producto de los valores absolutos de los factores en cada caso, ¿son iguales o difieren?, ¿por qué?
c) Cuando se multiplican dos factores no neutros, de acuerdo con su carácter positivo o negativo, se pueden presentar cuatro posibilidades como se muestra en la siguiente tabla. Completen la columna "Producto" de acuerdo con lo que han observado en las actividades anteriores.

Factor 1	Factor 2	Producto
Positivo	Positivo	Positivo
Positivo	Negativo	
Negativo	Positivo	
Negativo	Negativo	

d) De manera análoga al inciso anterior escriban todas las posibles combinaciones que se obtienen al considerar el producto de tres factores.
e) Dado que un número entero sólo puede ser positivo, negativo o cero, ¿qué criterio o procedimiento se puede seguir para determinar el carácter positivo, negativo o neutro del producto de tres factores enteros?
f) Con base en lo anterior, ¿cuál sería el resultado de la operación $(+2)(-3)(+4)$?, ¿y el de $(-2)(+3)(-4)$?

De forma grupal, establezcan en general un procedimiento que permita obtener el resultado de un producto de tres números enteros y determinen si lo pueden generalizar para trabajar con el producto de cuatro o más números enteros.

Visión matemática

Es posible usar la *regla de los signos para la multiplicación* de tal manera que puedas simplificar los cálculos, pero date cuenta que es posible darles sentido a este tipo de operaciones sin tener que memorizar una regla.

Consideren la siguiente secuencia de multiplicaciones de números enteros:

$$(-8) \times (-8)$$

$$(-8) \times (-8) \times (-8)$$

$$(-8) \times (-8) \times (-8) \times (-8)$$

$$(-8) \times (-8) \times (-8) \times (-8) \times (-8)$$

Respondan lo que se solicita.

a) ¿Cuál es el resultado de la operación en el primer renglón?
b) Usando el resultado del primer renglón, ¿cuál sería el resultado de la operación en el segundo renglón?
c) ¿Pueden usar el resultado del segundo renglón para obtener el resultado de la operación en el tercer renglón? Expliquen cómo lo harían.
d) Para obtener el resultado de la operación en el tercer renglón también podrían usar el resultado del primer renglón. Expliquen cómo procederían y establezcan el producto.
e) ¿Cuál sería el resultado de la operación en el cuarto renglón?
f) ¿Notan algún patrón en los signos de los resultados? Expliquen cuál es.
g) A partir de lo anterior, ¿tendría sentido que la secuencia de multiplicaciones comenzará con un solo factor (−8)? Justifiquen su respuesta.
h) En el espacio indicado coloquen dos renglones más de la secuencia.

Elijan a un representante para que pase al pizarrón y agregue cuatro renglones más a la secuencia de multiplicaciones. Usen lo anterior para formular y justificar de forma grupal un criterio que les permita definir el carácter positivo, negativo o neutro del producto dado cierto número de factores.

Escribe cinco multiplicaciones de números enteros y varía los signos en cada uno de los factores de tal manera que puedas validar o refutar el criterio que elaboraron en la actividad anterior, por equipos. Si fuera el caso, en conjunto escriban nuevamente el criterio y proporcionen ejemplos para validarlo.

En concreto

Para multiplicar dos números enteros no neutros se siguen estos pasos:

1. Se multiplican sus valores absolutos.
2. El producto es positivo si ambos números son positivos o negativos, y el producto es negativo si son de signos diferentes.

Por ejemplo:

Multiplicar $(-3)(-12)$.

1. El valor absoluto de -3 es 3 y el de -12 es 12. Luego:

   $$3 \times 12 = 36$$

2. Debido a que ambos factores son negativos, el producto es positivo. Por lo tanto:

   $$(-3)(-12) = 36$$

Visión matemática

Cada vez que elabores un criterio o procedimiento, debes verificarlo con algunos ejemplos. Lo anterior no significa que con unos ejemplos particulares el criterio se cumpla en todos los casos, pero te permite detectar fallos en la formulación del mismo.

La división de números enteros

Consideren la siguiente tabla y respondan lo que se solicita.

Dividendo	Divisor	Cociente
12	4	3
8	4	2
4	4	1
0	4	
−4	4	
−8	4	

a) ¿Qué regularidades observan en la tabla? Expliquen cada una de ellas.
b) ¿Cuál es el resultado en la cuarta fila en la columna "Cociente"?, ¿por qué?
c) ¿Cuáles son los resultados en la quinta y en la sexta fila en la columna "Cociente"? Justifiquen las respuestas.
d) ¿Qué pueden decir de la relación entre el carácter positivo, negativo o neutro del dividendo y del divisor con respecto al carácter positivo, negativo o neutro del cociente? Argumenten al respecto.

Intercambien ideas con otras parejas acerca de la relación entre el carácter positivo, negativo o neutro en los elementos de una división.

Biblioteca

En el libro *El imperio de los números* de Denis Guedij, descubrirás cuál de las siguientes civilizaciones: babilónica, egipcia, griega, arábiga o índica, sí utilizó los números negativos por necesidades contables y estableció lo que seguramente conoces como "la regla de los signos".

También puedes pedir una sugerencia bibliográfica a tu profesor sobre el tema para que puedas investigar más al respecto.

En la secuencia anterior, al operar con fracciones, volviste a comprobar que hay una estrecha relación entre la multiplicación y la división, pues son operaciones inversas.

Trata de responder las siguientes preguntas:

- ¿Qué número multiplicado por 6 da como resultado 48?
- ¿Qué número multiplicado por −3 da como resultado 21?
- ¿Qué número multiplicado por 5 da como resultado −105?
- ¿Qué número multiplicado por −12 da como resultado −60?

Ahora responde lo siguiente:

a) ¿Qué procedimiento utilizaste para encontrar la respuesta a la primera cuestión?
b) En la segunda pregunta, ¿qué signo debería tener el número que se busca para cumplir con lo que se pide?, ¿por qué?
c) ¿Cómo comprobarías la respuesta a la tercera pregunta?
d) ¿Cuál es el procedimiento que seguiste para resolver la cuarta pregunta y cómo la comprobarías?
e) Reúnete con un compañero y transformen las cuestiones en enunciados del siguiente tipo:

$(6) \times (\quad) = 48$ porque $48 \div 6 =$

Resuélvanlos y no olviden comprobar sus cálculos.

Con base en lo anterior, formulen un criterio que establezca el signo del cociente dados los signos del dividendo y del divisor.

Completa las siguientes operaciones.

a) $(+2) \times (\quad) = -22$

b) $(\quad) \div (-50) = -5$

c) $(-120) \div (\quad) = 15$

d) $(\quad) \div (8) = -15$

e) $(\quad) \times (\quad) = 25$

f) $(\quad) \times (-14) = 196$

Anota en tu cuaderno los procedimientos que seguiste para resolver cada operación.

En una papelería, el dueño ha registrado las siguientes cantidades de acuerdo con las finanzas de su negocio.

Mes	Saldo
Julio	−250
Agosto	1 200
Septiembre	2 000
Octubre	500
Noviembre	−100
Diciembre	−400

a) ¿Cuál ha sido su ganancia o pérdida durante ese periodo?

b) ¿Cuál es el **promedio** mensual de ventas durante ese semestre?

c) Suponiendo que todos los meses del año mantiene el promedio de ventas anterior, ¿a cuánto ascenderían sus ganancias el próximo año?, ¿y durante los próximos cinco años?

d) Considerando los datos de la tabla, si el dueño del negocio decidiera hacer mancuerna con otro socio, ¿cuál es la ganancia o pérdida que le correspondería a cada uno? Justifiquen su respuesta.

e) Si durante el primer semestre del año el dueño reportaba un **saldo** de −3 500 pesos y durante el segundo semestre se considera la información que aparece en la tabla, ¿cuánto debe aportar el dueño de la papelería para comenzar sus finanzas del próximo año en cero?

Compara tus respuestas con un compañero y validen los procedimientos que usaron para responder.

En concreto

Las reglas sobre el carácter positivo o negativo del producto resultante al multiplicar dos factores no neutros, también se aplican de forma correspondiente en la división.

Si el dividendo y el divisor son ambos positivos o negativos, el cociente es positivo.
Por ejemplo:

$(-18) \div (-9) = 2$
$(12) \div (3) = 4$

Si el dividendo y el divisor son uno positivo y el otro negativo, el cociente es negativo.
Por ejemplo:

$(-24) \div (6) = -4$
$(10) \div (-2) = -5$

Glosario

promedio. Equivale a la suma de todos los datos dividida entre el total de ellos.

saldo. Cantidad positiva o negativa que resulta del manejo de una cuenta.
Por ejemplo, si se tienen \$2000 y se retiran \$2500, el saldo es negativo: se deben \$500.
Si se tienen \$800 y sólo se ocupan \$500, el saldo es positivo: se dispone de \$300.
Si se tienen \$450 y se gastan \$450, el resultado es cero o neutro: ni se tiene, ni se debe.

Multiplicación y división con números enteros, decimales y fraccionarios, positivos y negativos

Es natural preguntarse si las fracciones y los decimales pueden operarse también bajo los signos positivo y negativo. Afortunadamente, la respuesta es afirmativa.

Visión matemática

¿Se te ocurre plantear algún problema en el que se requieran usar los números enteros, fraccionarios y decimales, positivos y negativos, que aparecen aquí?

Piensa en uno, preséntalo al grupo y entre todos busquen la solución.

Consideren las siguientes operaciones y respondan lo que se te solicita a continuación.

$(1)(-3)(2)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{5}\right)$

$(0.5)(-0.75)(0.4)$

$\left(\frac{1}{2}\right)(-0.75)\left(\frac{2}{5}\right)$

$\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{4}\right)\left(\frac{2}{5}\right)$

a) ¿Cuál de las tres operaciones consideran que es la más fácil de resolver?, ¿por qué?

b) ¿Es necesario hacer uso de la jerarquía de operaciones en alguna de las operaciones para resolverla? Justifiquen su respuesta.

c) ¿Cuál es el carácter positivo, negativo o neutro de los resultados en los cuatro casos?

d) ¿Cuál es el resultado en los cuatro casos?, ¿a qué creen que se debe?

De forma grupal, revisen los resultados de las operaciones y, dada una operación de multiplicación de números (enteros, fraccionarios o decimales), definan algún procedimiento que les permita decidir cuál es la manera más fácil y rápida en la que pueden calcular el resultado.

Resuelvan las siguientes operaciones bajo las siguientes consignas.

- Determinen el carácter positivo, negativo o neutro del resultado.
- Establezcan una aproximación del resultado. No es tan importante el resultado exacto, aunque lo pueden calcular.

Por ejemplo, para la operación $(0.3) \div \left(-\frac{1}{2}\right)$, el resultado es negativo y la división se puede convertir en una multiplicación, por lo que habría que obtener el doble del primer factor, y por tanto, el resultado exacto sería -0.6.

a) $(-4.9)\left(\frac{101}{50}\right)$

b) $(-1) \times (0.502) \times \left(-\frac{1}{10}\right)$

c) $(0.75) \div (2) \times \left(-\frac{1}{4}\right)$

d) $\left(-\frac{3}{4}\right) \div \left(\frac{5}{3}\right) \div \left(\frac{2}{5}\right)$

e) $(-5) \times (0.9) \times (-10.1)$

f) $(0.01) \times \left(\frac{21}{10}\right) \div (10.001)$

De forma grupal, verifiquen las aproximaciones anteriores. Posteriormente, organizados por equipos, realicen una competencia de cálculo mental. El profesor propondrá diez operaciones de multiplicación, división o combinaciones de ellas en las que se haga uso de números con signo. La idea no es obtener un resultado exacto sino un resultado aproximado obtenido mediante cálculo mental. Cada aproximación correcta, con su carácter positivo, negativo o neutro correspondiente, contará como un punto y ganará el equipo que acumule más. Para validar las respuestas y determinar qué tan buenas fueron las aproximaciones propuestas pueden usar una calculadora, inclusive les puede ayudar para descartar un empate en caso de que dos equipos hayan proporcionado respuestas parecidas.

Visión matemática

¿Para qué crees que sea útil el cálculo mental?, ¿lo ocupas en tu vida cotidiana?

Lee con atención la siguiente situación y responde lo que se solicita.

Para alentar a los alumnos de la clase a participar, el maestro de Ciencias organizó un concurso de trivia, el cual consta de 15 preguntas en total. Todos los participantes pueden responder la pregunta; si aciertan suman cuatro puntos, pero cada respuesta incorrecta les quita dos puntos.

a) ¿Cuál fue el puntaje total de Luis si contestó correctamente a todas las preguntas?
b) ¿Cuál fue el puntaje total de Ana sabiendo que contestó mal a todas las preguntas?
c) Después de diez preguntas Pedro obtuvo diez puntos, mientras que José contestó correctamente la mitad. ¿Quién de los dos tenía un mayor puntaje hasta ese momento?
d) Considera que Joaquín calculó su puntaje al final del juego mediante la operación $(4)(4) + (-2)(11)$, ¿cuántas preguntas contestó de forma correcta?, ¿en cuántas se equivocó?
e) Nora erró el doble de lo que acertó, ¿cuál fue su puntaje al final?
f) María afirma que después de la sexta pregunta contaba con diez puntos, ¿es eso posible? Justifica tu respuesta.

Reúnete con un compañero para revisar sus respuestas, comparen los procedimientos que usaron y reflexionen sobre el uso de la multiplicación y división con números enteros y fracciones, positivos y negativos, que pueden aplicar en este caso.

En concreto

Las reglas de los signos de la multiplicación y división, extendidas para los números fraccionarios y números decimales, positivos y negativos, se expresan a continuación:

Multiplicación

(Positivo)(Positivo) = Positivo
(Positivo)(Negativo) = Negativo
(Negativo)(Positivo) = Negativo
(Negativo)(Negativo) = Positivo

División

(Positivo) ÷ (Positivo) = Positivo
(Positivo) ÷ (Negativo) = Negativo
(Negativo) ÷ (Positivo) = Negativo
(Negativo) ÷ (Negativo) = Positivo

Aplicaciones de las operaciones de números enteros, fraccionarios y decimales, positivos y negativos

Las temperaturas en grados Celsius (°C) se relacionan con las temperaturas en grados Fahrenheit (°F) mediante la fórmula:

$$°C = \frac{5}{9}(°F - 32)$$

a) ¿Qué dato necesitan introducir en la fórmula para obtener un resultado? Expliquen a detalle cómo utilizar la fórmula. Todos los integrantes del equipo deben estar convencidos de que entienden su uso y utilidad.

b) Utilicen un número decimal en lugar de la fracción y reescriban la fórmula anterior.

c) ¿Qué fórmula les parece más sencilla de manejar, la que involucra una fracción o la que hace uso de un número decimal?, ¿por qué?

d) ¿Es cierto que si en la fórmula introducen un valor negativo de temperatura en °F obtienen un valor negativo en °C? Justifiquen su respuesta. ¿Qué sucede si introducen un valor de °F positivo?

e) ¿Qué rango o intervalo de temperatura en °F produce valores positivos de temperatura en °C?

f) Den un valor de temperatura en °F de tal manera que el resultado en °C sea negativo. Justifiquen su propuesta.

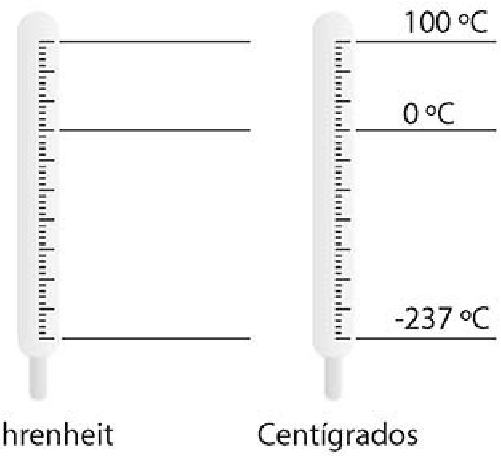
g) Usen el cálculo mental para estimar la relación en grados Celsius de 50 °F y 230 °F.

h) ¿Qué deben hacer con la fórmula para obtener la relación en °F si sólo conoces la temperatura en °C? Expliquen.

i) Calculen las temperaturas en °C correspondientes a las siguientes temperaturas en °F.

- 32 °F
- 212 °F
- −459 °F

Con base en sus respuestas, en la siguiente imagen determinen las equivalencias en °F de las temperaturas en °C señaladas



Visión matemática

Si un alimento se debe conservar en el refrigerador a 23 °F, ¿a qué temperatura en °C se debe almacenar?

Transversalidad

¿En qué asignatura les será de utilidad el esquema?

Lee con atención lo siguiente y realiza lo que se te solicita.

Un cuadrado mágico de orden n es una cuadrícula de $n \times n$ casillas en donde se colocan números.

Existen los cuadrados mágicos aditivos, cuya propiedad fundamental es que la suma de todos los números de cada fila, de cada columna y de cada diagonal es constante. Existen también los cuadrados mágicos multiplicativos, cuya propiedad fundamental es que el producto de todos los números de cada fila, columna o diagonal es constante. En ambos casos, al valor resultante (suma o producto) se le conoce como *constante mágica*.

El siguiente cuadrado mágico de orden 3 es multiplicativo.

12	9	2
1	6	36
18	4	3

a) Calcula la constante del cuadrado mágico anterior.

b) Considera el siguiente cuadrado mágico, ¿es multiplicativo? Justifica tu respuesta.

-2	-1.5	$-\frac{1}{3}$
$-\frac{1}{6}$	-1	-6
-3	$-\frac{2}{3}$	-0.5

c) Si se multiplica o divide por el mismo valor a todos los números de un cuadrado mágico multiplicativo, el resultado es otro cuadrado mágico multiplicativo. Multiplica y divide por $-\frac{3}{2}$, respectivamente, el cuadrado mágico anterior, completa con los resultados los siguientes cuadrados y determina la constante mágica de cada uno.

Reúnete con un compañero para verificar tus respuestas. Después, piensen si pueden existir cuadrados multiplicativos de orden 2. De ser así escríbanlo; si consideran que no, den ideas de por qué no existen.

Visión matemática

Realiza una investigación para conocer más de los diferentes tipos de cuadrados mágicos que existen y expón tus hallazgos a través de un cartel.

Enl@ce

Accede al siguiente enlace http://ntic.educacion.es/w3/eos/MaterialesEducativos/primaria/matematicas/conmates/actividades/jmatch412.htm y refuerza el tema de la multiplicación y división de números enteros con los ejercicios que se proponen.

Corrijo y aprendo

Accede al siguiente enlace para que puedas practicar la multiplicación y división de números enteros https://www.thatquiz.org/es-1/matematicas/aritmetica/

En la parte superior izquierda con la lista desplegable "Largo" puedes modificar la cantidad de ejercicios. Selecciona el nivel de dificultad de 1 a 100 y establece un tiempo límite, de hasta 30 minutos para responder. Marca las casillas correspondientes a "Multiplicar" y "Dividir", "Negativos" y "Paréntesis", además elige la opción "Sencillo" o "Invertido" dependiendo de la variedad que quieras darle a la prueba.

Al final, se presenta tu resultado. Corrige las respuestas incorrectas en tu cuaderno.

πensa

Realiza en tu cuaderno las siguientes actividades para consolidar el conocimiento que acabas de adquirir.

a) Escribe las semejanzas y las diferencias entre las siguientes dos formas de establecer la regla de los signos en el producto y decide en tu caso cuál es más fácil de aprender. Justifica tus razones.

Forma A	Forma B
El producto de dos factores con diferente signo es negativo.	$(+)(-) = -$ o $(-)(+) = -$
El producto de dos factores con igual signo es positivo.	$(+)(+) = +$ o $(-)(-) = +$

b) ¿Qué signo tiene el siguiente producto?

$$(-1)(+2)(-3)\ldots(+98)(-99)(+100)$$

Justifica tu respuesta.

c) Determina el valor faltante en el siguiente cuadrado mágico, de manera que sea multiplicativo. Ten en cuenta que es el mismo valor en las tres casillas.

-4		-1
$-\frac{1}{2}$		-8
-4		-1

d) Redacta y resuelve un problema que implique la multiplicación y división con números enteros, fracciones y decimales positivos y negativos. Haz uso de un contexto real para plantear el problema.

En plenaria revisen las respuestas de las actividades y realicen un repaso de los temas que les hayan causado más dificultades.

Pruébate

Selecciona la respuesta correcta para cada pregunta.

1. ¿Qué carácter (positivo, negativo o neutro) tiene el resultado de dividir cero entre menos cinco?

   a) Positivo
   b) Negativo
   c) Neutro
   d) Esa operación no se puede realizar

2. Estudios señalan que los adultos pierden hasta el 8% de su masa muscular cada década, a partir de los 40 años. Para un adulto de 40 años que actualmente cuenta con 28 kg de masa muscular, ¿qué expresión numérica permite calcular el total de dicha masa después de diez años si el sujeto no emprende acción como realizar ejercicios de fortalecimiento?

   a) $40 - 28 \times 8\%$
   b) $28 + \frac{80}{100}(-28)$
   c) $28 + \left(-\frac{8}{100}\right)(28)$
   d) $45 - 28 \times \frac{8}{100}$

3. ¿Cuál de las siguientes situaciones se puede modelar mediante la operación $-\frac{123\,660}{3}$?

   a) La profundidad a la que se ha sumergido un submarino en tres minutos
   b) El monto del **déficit** que le corresponde cubrir a cada uno de los tres socios que emprendieron un negocio
   c) Las tres veces que una persona hizo un depósito de \$123 660
   d) El monto total de una inversión que se mantuvo por tres meses en una cuenta bancaria

4. ¿En cuál de las siguientes operaciones el resultado es más próximo a -5?

   a) $\left(\frac{15}{3}\right) \div (0.02) \div \left(-\frac{2}{5}\right)$
   b) $(0.9)(-2.5)(-2)$
   c) $(-5)\left(\frac{3}{2}\right)(0.6)$
   d) $(-1)(-2) \div (-2.5)$

5. ¿Cuál es el carácter (positivo, negativo o neutro) del resultado en una multiplicación en la que hay un número **par** de factores enteros positivos y un número **impar** de factores enteros negativos?

   a) Positivo
   b) Negativo
   c) Neutro
   d) Depende del valor absoluto de los factores

Glosario

déficit. Se refiere a un saldo negativo correspondiente a un gasto mayor al ingreso.

par. Número presente en la secuencia 0, 2, 4, 6, 8,...

impar. Número presente en la secuencia 1, 3, 5, 7, 9,...

Corrijo y aprendo

¿Cuál fue tu desempeño en esta evaluación? Puedes asignarte una calificación, pero es más importante que reflexiones sobre lo que hiciste bien y en lo que te equivocaste.

Resuelve problemas de potencias con exponente entero y aproxima raíces cuadradas

Empieza

Recuerda conocimientos anteriores, relacionados con las operaciones de números con signo, resolviendo las siguientes actividades. Compara tus respuestas con un compañero. Si encuentran errores, coméntenlos y realicen las correcciones necesarias.

a) Escribe tres multiplicaciones, con dos factores cada una, cuyo producto sea igual a 9.

b) Completa la siguiente tabla de multiplicaciones. Guíate por el ejemplo.

×	−5	−2	−1	−4	5	−3	0	−6	3	1	−7	2	4
−5													
−3												−6	
−4													
−1													
1													
5													
2													
−2													
4													
−6													
3													
−0													
−7													

c) ¿Cuál es el carácter (positivo, negativo o neutro) del producto de un número impar de factores enteros negativos?

d) ¿Cuál es el carácter (positivo, negativo o neutro) del producto si en la operación hay un número impar de factores enteros positivos y un número impar de factores enteros negativos?

Avanza

Cuatro problemas

Lee con atención cada uno de las siguientes situaciones y responde lo que se te solicita a continuación.

Cuatro jaulas tienen cada una cuatro pajarillos.
¿Cuántos pajarillos hay en total?

Pedro puede elegir entre tres pantalones y tres camisas para vestirse.
¿De cuántas maneras puede hacer la elección de su vestuario?

¿Cuál es el área de un cuadrado de lado 5 cm?

En cada uno de los nueve pisos de un edificio hay nueve departamentos. ¿Cuántos departamentos hay en total en el edificio?

a) ¿Cuál es la situación más fácil de resolver? ¿Por qué?
b) ¿Puedes usar un diagrama para ilustrar la solución de cada situación?, ¿cómo lo harías?
c) Sin utilizar diagramas, ¿qué operación realizarías para resolver lo planteado?, ¿por qué?
d) ¿Qué tienen en común estos problemas?

Compara tus respuestas con un compañero e intercambien ideas sobre los diferentes procedimientos que utilizaron para resolver los problemas. Determinen si hay un procedimiento en común que se pueda utilizar para resolver lo planteado en todos los casos.

Ahora consideren los siguientes enunciados.

En cuatro casas, hay cuatro jaulas con cuatro pajarillos cada una.
¿Cuántos pajarillos hay en total?

Pedro puede elegir entre tres pantalones, tres camisas y tres corbatas para vestirse. ¿De cuántas maneras puede hacer la elección de su vestuario?

¿Cuál es el volumen de un cubo de arista 5 cm?

Se construyeron nueve edificios de nueve pisos cada uno y en cada piso existen nueve departamentos. ¿Cuántos departamentos hay en total?

Analicen los enunciados anteriores y respondan en su cuaderno lo que se solicita.

a) ¿Cuál es la situación más sencilla de resolver? Argumenten sus respuestas.

b) ¿Cuál es el parecido de estos enunciados con los anteriores? Expliquen las similitudes.
c) Resuelvan mediante diagramas cada uno de los enunciados y anoten la solución.
d) Determinen y anoten las operaciones con las que se obtiene el resultado en cada situación cuando se resuelve sin el uso de diagramas.
e) Anoten las coincidencias o diferencias que encontraron entre sus respuestas del inciso ***a*)** y lo que obtuvieron en los incisos ***c*)** y ***d*)**. Elaboren una conclusión.

Comenten sus respuestas con otras parejas. Es importante que escuchen los diferentes procedimientos que se pueden usar para resolver cada situación. Tomen nota de los que les resultan más prácticos.

Visión matemática

¿Cuáles son las palabras o pistas en un problema que te pueden indicar que su solución se obtiene mediante una multiplicación?

Consideren el enunciado:

Nueve empresas constructoras planean construir cada una nueve edificios de nueve pisos cada uno, de tal manera que en cada piso existan nueve departamentos. ¿Cuántos departamentos en total se planean construir?

Es muy probable, a partir de las actividades anteriores, que se hayan percatado de que para solucionar lo planteado en el enunciado, se puede hacer uso de la multiplicación; pero de un tipo muy especial, una en la que los factores son iguales.

Respondan cada uno de los siguientes planteamientos.

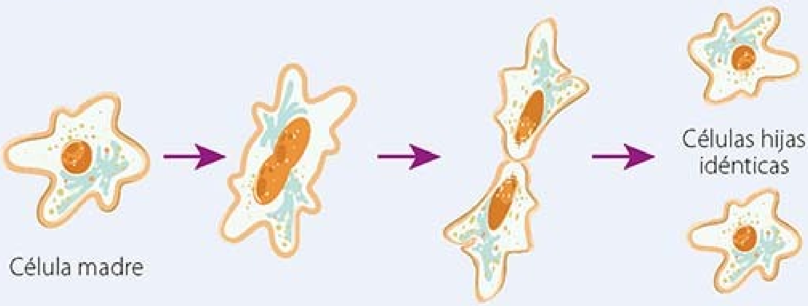
a) ¿Cuál es la operación que resuelve la situación?
b) ¿Por qué se puede afirmar que la operación $9 \times 9 \times 9 \times 9$ da respuesta a la situación?
c) ¿A qué parte del enunciado corresponde cada factor 9 en la operación $9 \times 9 \times 9 \times 9$ que resuelve la situación?
d) ¿Cuál es el resultado de la operación $9 \times 9 \times 9 \times 9$?
e) ¿Qué problema pueden plantear que se resuelva con la operación $9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9$? Redacten el enunciado.
f) Escriban un procedimiento que explique cómo simplificar la escritura de una multiplicación donde todos los factores son iguales.

Modifiquen los enunciados de la página anterior agregando alguna condición, de tal manera que puedan presentar la solución de los mismos usando una multiplicación donde todos los factores son iguales. Comparen las distintas formulaciones que cada equipo proponga y determinen a qué dificultades se enfrentan en la formulación de los mismos.

Duplicación

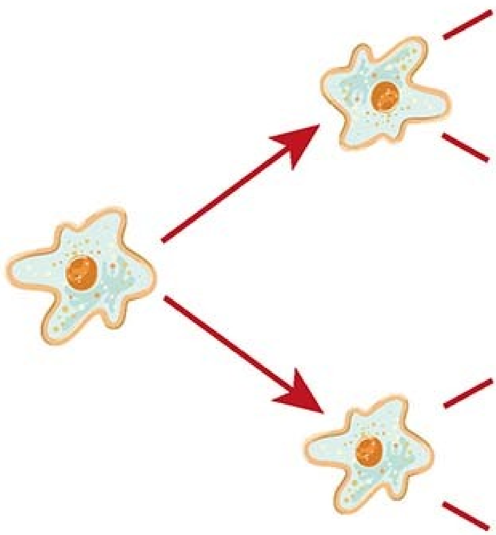
Lee con atención lo siguiente y realiza lo que se solicita.

Dependiendo de las condiciones iniciales en alimento y temperatura, dada una población inicial de bacterias, ésta se **duplicará** cuando haya pasado cierto tiempo, el cual puede ser minutos, horas o días. El siguiente diagrama muestra cómo a partir de una célula madre se crean dos células hijas.



Considera que en un laboratorio se aisló una de estas bacterias y debido a las condiciones en las que se encuentran, su duplicación se efectúa cada hora.

a) Copia y completa en tu cuaderno el siguiente diagrama de acuerdo con el proceso mediante el cual se reproduce la bacteria inicial. Anota a cada paso el tiempo que ha transcurrido.



b) ¿Cuántas bacterias conforman la población después de una hora?, ¿después de dos?, ¿después de tres horas?

c) ¿Cuánto tiempo debe pasar para que la población supere las cien bacterias?

Glosario

Duplicación. Se refiere a repetir algo o hacer una copia.

Transversalidad

Recuerda lo visto en tu curso de Ciencias I, ¿a qué tipo de reproducción celular corresponde la ilustración?

d) Completa la siguiente tabla que sirve para contar el número de individuos en la población de bacterias a medida que transcurre el tiempo.

Tiempo (horas)	Individuos
0	1
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

e) ¿Observas alguna regularidad en la tabla anterior? Explícala.
f) Si se hubiera iniciado con una población de dos bacterias, ¿cuánto tiempo debe transcurrir para que esa población se conforme por más de cien bacterias?
g) ¿A qué número de horas corresponde el número de bacterias obtenido con la expresión $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$?
h) ¿Qué operación o expresión numérica te permitiría calcular el número de individuos en la población de bacterias después de quince horas? Justifica tu respuesta.
i) ¿Te imaginas cuánto tiempo debe pasar para que el número de bacterias supere el millón? Haz una estimación.

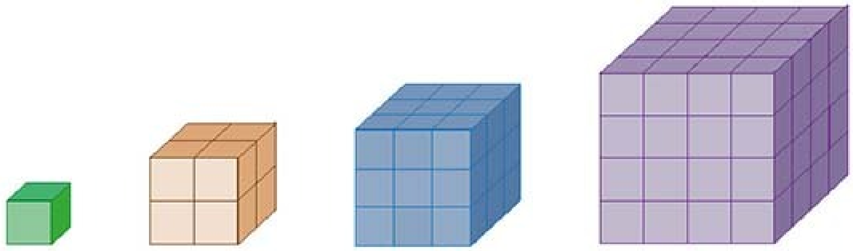
Reúnete con un compañero e intercambien ideas sobre la conveniencia de usar una notación especial para simplificar los cálculos que se emplean en este contexto.

Visión matemática

Compara el diagrama de la página anterior y la tabla. ¿Cuál de ellos te parece más fácil de manipular?, ¿cuál es más útil?

Cubos

Observen la siguiente sucesión de cuerpos geométricos.



1 2 3 4

Realicen lo que se te solicita en cada caso.

a) Dibujen en su cuaderno el quinto elemento de la sucesión y respondan, ¿cuántos cubitos forman la base del quinto cubo en la sucesión y cuántos cubitos lo forman en total?

b) Completen la siguiente tabla y respondan, ¿qué relación notan entre las columnas de la tabla?

Figura	Número de cubos en cada arista	Número de cubos en la base	Total de cubos en el cuerpo geométrico
1			
2			
3			
4			
5			

c) ¿Qué pueden calcular con la expresión 6×6?, ¿y con la expresión $6 \times 6 \times 6$?

d) ¿Hay algún cubo cuya base esté formada por 49 cubitos? Justifiquen su respuesta.

e) ¿Hay algún cubo en la sucesión que esté formado por exactamente 264 cubitos? Justifiquen su respuesta.

f) ¿Cómo calcularían el número de cubitos en total que forma al cubo que está en la posición 11 de la sucesión?

Comparen sus respuestas con las de otras parejas, recuerden mantener una actitud de respeto al intercambiar sus resultados y comenten las similitudes que encuentran entre ésta y la actividad anterior.

En concreto

Cuando se trata de la multiplicación repetida de un número por sí mismo conviene introducir una operación que se conoce como *potenciación*.

La notación

Exponente

$$2^5 = 32$$

Base Potencia

se lee como "dos elevado a la quinta potencia" o "la quinta potencia de dos" y significa que la base (el número 2) ha de multiplicarse por sí misma tantas veces como lo indica el exponente (5 veces).

En general, en la expresión:

$$b^e = p$$

El número b es la base, el número e es el exponente y el resultado p es la potencia.

Hasta este punto seguro han llegado a percibir la conveniencia de contar con una notación que permita expresar operaciones como o $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ o $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$ de forma simplificada.

Cada integrante del equipo completará uno o dos renglones de la siguiente tabla. Consideren la información de la cápsula "En concreto" de la página anterior y apoyen a quien lo necesite, pues es necesaria una comprensión de la notación de potencias para avanzar con el tema.

Expresión	Base	Exponente	Potencia
$2 \times 2 \times 2 \times 2$			
			3^5
	4	2	
$5 \times 5 \times 5$			
	3	1	
			2^6
	1	3	
$6 \times 6 \times 6 \times 6$			

Considera las siguientes potencias:

2^5 5^2

Analiza las expresiones anteriores y da respuesta a lo que se solicita.

a) Explica las semejanzas y las diferencias entre ambas potencias.
b) ¿Cuál es el valor de la potencia de la izquierda?, ¿y el de la derecha? ¿Cuál potencia representa un número mayor?
c) Explica por qué ninguna de estas potencias es igual a 10.
d) ¿Qué valor será mayor 10^2 o 2^{10}?, ¿por qué?
e) ¿Qué valor será mayor 2^5 o 2^{10}?, ¿por qué?
f) ¿Para comparar potencias se pueden comparar por separado las bases y los exponentes? Argumenta tu respuesta.

Reúnete con un compañero y propongan potencias similares para que puedan distinguir el papel de la base y el exponente en el cálculo de potencias.

Corrijo y aprendo

¿Cuál consideran que es el error más frecuente al operar con potencias? Ejemplifíquenlo, reflexionen sobre él y coméntenlo para reforzar su aprendizaje.

Propiedades de las potencias

Hay ciertas potencias cuyo cálculo a menudo conduce a error. Con el fin de comprender estos casos especiales observen y analicen los siguientes pares de potencias:

1^5 y 5^1

0^2 y 2^0

De ser posible, calculen las potencias anteriores y den respuesta a lo siguiente.

a) ¿Cuál es el resultado de una potencia en la que la base es uno y el exponente es un entero positivo?, ¿por qué?

b) ¿Cuál es el resultado de una potencia en la que la base es un entero positivo y el exponente es uno?, ¿por qué?

c) ¿Qué resulta al calcular una potencia cuya base es cero y el exponente es un entero positivo?

d) ¿Qué valor tiene una potencia cuya base es un entero positivo y el exponente es cero? Justifiquen su respuesta.

Intercambien ideas con otras parejas sobre cómo calcularían potencias en las que la base o el exponente pueden ser cualquier número entero, es decir, negativo, positivo o cero. Registren todas ellas para que posteriormente puedan compararlas con el conocimiento que construyan al respecto.

Las siguientes tablas presentan las primeras potencias de bases 2 y de 3; seguramente ya reconoces algunos resultados porque los has obtenido en actividades anteriores.

Potencias de base 2	
Potencia	**Resultado**
2^1	
2^2	
2^3	
2^4	
2^5	
2^6	
2^7	
2^8	
2^9	
2^{10}	

Potencias de base 3	
Potencia	**Resultado**
3^1	
3^2	
3^3	
3^4	
3^5	
3^6	
3^7	
3^8	
3^9	
3^{10}	

En concreto

Se cumple lo siguiente:

$a^0 = 1$ para a un entero positivo (1, 2, 3, 4…).

$a^1 = a$ para a un entero no negativo (0, 1, 2, 3…).

a) Completa las tablas anteriores.

b) Calcula el resultado de las siguientes multiplicaciones y reescribe todas ellas utilizando las tablas de las potencias de bases 2 y 3, guíate con este ejemplo:

$$64 \times 8 = 512$$
$$2^6 \times 2^3 = 2^9$$

$4 \times 32 =$
$\quad \times \quad =$

$27 \times 81 =$
$\quad \times \quad =$

$81 \times 243 =$
$\quad \times \quad =$

$9 \times 243 =$
$\quad \times \quad =$

$32 \times 32 =$
$\quad \times \quad =$

$3 \times 2\,187 =$
$\quad \times \quad =$

c) ¿Notas alguna relación entre los exponentes de los factores y el exponente del resultado?, ¿cuál es?

d) ¿Cuál sería el resultado de multiplicar $2^{10} \times 2^{15}$?, ¿por qué?

e) ¿Qué conviene más, multiplicar 19683×59049 o realizar la operación $3^9 \times 3^{10}$, ¿por qué? ¿A qué es igual el resultado?

f) ¿Se cumple que $3^4 \times 3^5 = 3^5 \times 3^4$?, ¿a qué crees que se debe?

Junto con un compañero traten de redactar una regla o fórmula que permita calcular con facilidad productos de potencias. ¿Qué características deben tener los factores para multiplicarlos?

En concreto

Si a es un número entero y m, n son enteros no negativos (0, 1, 2, 3…), entonces se cumple lo siguiente:

$$a^n a^m = a^{n+m}$$

Por ejemplo, si $a = 4$, $m = 2$ y $n = 3$, por un lado se tiene que:

$$4^2 \times 4^3 = (4 \times 4) \times (4 \times 4 \times 4)$$
$$= 16 \times 64$$
$$= 1024$$

Por el otro, se tiene que:

$$4^{2+3} = 4^5$$
$$= 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4$$
$$= 1024$$

Por lo que se cumple:

$$4^2 \times 4^3 = 4^{2+3}$$

Consideren los siguientes cálculos:

$$4^3 \times 4^5 = (4 \times 4 \times 4) \times (4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4) = 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^8$$

$$5^4 \times 5^3 = (5 \times 5 \times 5 \times 5) \times (5 \times 5 \times 5) = 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^7$$

Revisen el desarrollo de los cálculos, compruébenlos y contesten lo siguiente:

a) ¿Para qué se utilizan los paréntesis en estos cálculos?, ¿son necesarios? Justifiquen tu respuesta.

b) ¿Qué se pudo haber hecho para evitar desarrollar las potencias?, ¿por qué?

c) Sin desarrollar las potencias, ¿cuál sería el resultado del producto $6^5 \times 6^8$? Justifiquen su respuesta.

Con otras parejas, revisen las reglas o fórmulas para calcular productos de potencias que propusieron y, con base en lo realizado en ésta, mejórenlas o (si consideran que son claras) escríbanlas en el pizarrón para que entre todos acuerden su uso y utilidad.

Potencias de números enteros, fraccionarios y decimales

Hasta ahora has calculado potencias en las que la base es un número entero positivo, pero no existe razón para no calcular potencias en las que la base es un número fraccionario o decimal positivo.

Usa la definición de potencia para calcular lo siguiente:

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^2$

b) $\left(\frac{2}{3}\right)^5$

c) $(0.12)^3$

d) $\left(\frac{1}{2}\right)^3$

e) $(0.12)^2$

f) $(2.1)^4$

Compara tus respuestas con las de un compañero y corrijan lo que sea necesario. ¿Qué aspectos se modifican cuando se trata de calcular potencias cuya base es un número fraccionario o decimal positivo?

Es hora de aplicar lo que han aprendido hasta el momento.

Lee con atención la siguiente situación y da respuesta a lo que se te solicita en cada caso.

Entre los tipos de candados más comunes que se pueden encontrar, están los que usan llave y los de combinación. Algunos modelos de estos últimos usan discos, como se muestra en la siguiente ilustración:

En el candado, cada disco tiene diez cifras grabadas, del 0 al 9, y cuando se mueven los discos para dar lugar a una combinación particular de números, el candado se abre; pero cualquier otra combinación que no sea la correcta impide su apertura.

Beatriz, para asegurar un casillero con sus objetos personales, utiliza un candado de combinación de cuatro discos.

Visión matemática

¿Qué se te facilita, calcular potencias de números fraccionarios o de decimales?, ¿por qué?

En concreto

Si a, b son números enteros con $b \neq 0$ y n es un entero no negativo (0, 1, 2, 3…), entonces se cumple lo siguiente:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Por ejemplo, si $a = 3$, $b = 2$ y $n = 4$, por un lado se tiene que:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{3 \times 3 \times 3 \times 3}{2 \times 2 \times 2 \times 2} = \frac{81}{16}$$

Por el otro, se tiene que:

$$\frac{3^4}{2^4} = \frac{3 \times 3 \times 3 \times 3}{2 \times 2 \times 2 \times 2} = \frac{81}{16}$$

Por lo que se cumple:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{3^4}{2^4}$$

a) ¿Cuántas opciones son posibles para la combinación correcta que abre el candado suponiendo que todos los números son diferentes?

b) Si Beatriz decide cambiar el candado de cuatro discos y en su lugar ocupa uno de tres discos, ¿cuántas opciones son posibles para el código correcto del nuevo candado, suponiento que todos los números de la combinación correcta son diferentes?

c) Pensando que necesita que sus pertenencias estén bien protegidas, Beatriz se decide por un candado de cinco discos en el que cada disco tiene grabados nueve números, del 1 al 9. Hipotéticamente, ¿cuál es el total de posibles combinaciones de códigos para abrir el candado que el ladrón tendría que probar para poder hurtar las pertenencias de Beatriz?

d) Con la respuesta al inciso anterior calcula el tiempo que tardaría el ladrón en probar todas las combinaciones de números suponiendo que pudiera probar cada combinación en un segundo.

Reúnanse con otras parejas e intercambien ideas sobre el diseño de un candado de discos cuyo número total de combinaciones posibles se expresa con la operación 27^4. Determinen si el diseño de tal candado es práctico.

En concreto

La palabra *combinaciones* en matemáticas tiene un significado preciso y de hecho hay una fórmula para calcularlas, pero en este caso la palabra tiene el sentido usual.

En concreto

Un porcentaje se puede expresar numéricamente de dos formas distintas: como una razón o como un número decimal.

Por ejemplo, 1% es equivalente a $\frac{1}{100}$ (1 de cada 100) o a 0.01.
Una manera de obtener el tanto por ciento de una cantidad consiste en realizar la multiplicación de la equivalencia del porcentaje como razón o como número decimal por la cantidad.

Así, 1% de \$200 000 es igual a $\frac{1}{100} \times 200\,000 = \frac{1 \times 200\,000}{100} = \frac{200\,000}{100} = 20\,000$. Por lo tanto, el 1% de \$200 000 es \$2 000. Cuando los porcentajes son sencillos, como 10% y 1%, es posible obtener mentalmente el resultado.

Analicen a detalle la siguiente situación y respondan lo que se solicita.

Una persona decide colocar su dinero en el "Banco Generoso", el cual ofrece el siguiente rendimiento en una cuenta de inversión: al invertir una cantidad mayor a cien mil pesos, el banco le regresará al final de un periodo mensual 0.1 % de lo depositado al inicio del mes. Por ejemplo, si Rosario deposita doscientos mil pesos el 1° de enero, el banco depositará en su cuenta doscientos pesos más el 31 de enero.

a) Rosario decidió depositar el 1° de febrero ciento cincuenta mil pesos. ¿Cuánto tendrá en su cuenta al final del mes?, ¿y después de dos y tres meses, respectivamente?

b) ¿Cuánto habrá generado de rendimiento lo invertido por Rosario para el 31 de diciembre?

c) ¿Es posible calcular de forma directa el rendimiento que generará el dinero invertido por Rosario dado un mes cualquiera? Justifica tu respuesta.

d) ¿Cuánto tiempo tendrá que esperar para ver reflejado en su cuenta un monto mayor a \$160 000?

Reúnanse con otros equipos, comparen las formas de resolución que utilizaron para abordar este problema y determinen cuál es el papel que juegan las potencias en dichos procedimientos.

Potencias cuya base es un número negativo

El cálculo de potencias también se extiende al caso en el que la base es un número entero, fraccionario o decimal, negativo.

Realiza lo que se solicita en cada caso.

***a*)** Usando la definición, calcula las siguientes potencias:

- $(-2)^1 =$
- $(-2)^2 =$
- $(-2)^3 =$
- $(-2)^4 =$
- $(-2)^5 =$

***b*)** Compara los resultados del inciso anterior con la tabla de potencias de base 2 que completaste en la página 47, ¿cuál es la principal diferencia que observas?

***c*)** ¿Explica por qué no ocurre que $(-2)^2 = -4$?

***d*)** ¿Cuál es el signo de la potencia cuando la base es un entero negativo y el exponente es impar?, ¿a qué crees que se debe?

***e*)** ¿Cuál es el signo de la potencia cuando la base es un entero negativo y el exponente es par?, ¿cómo lo justificas?

***f*)** ¿Cómo calcularían las siguientes potencias? Justifiquen el procedimiento que utilicen.

- $\left(-\frac{3}{4}\right)^2$
- $\left(-\frac{3}{4}\right)^3$
- $\left(-\frac{3}{4}\right)^4$
- $(-2.5)^2$
- $(-2.5)^3$

Visión matemática

¿Cómo puedes usar lo que aprendiste en la lección anterior para determinar el signo de los resultados?

Reúnete con un compañero para intercambiar ideas sobre el cálculo de potencias cuya base es un número positivo y negativo y cuyo exponente es un número entero positivo y comenten las principales confusiones a las que se enfrentaron al calcularlas. Un representante del grupo será el encargado de escribir algunos ejemplos extras para que practiquen y entre todos puedan aclarar las dudas más comunes.

Potencias de potencias

Consideren las siguientes expresiones:

$(2^3)^4$ $(3^2)^4$

Den respuesta a lo que se solicita en cada caso.

a) Las expresiones anteriores, ¿son potencias? En caso afirmativo indiquen en cada caso cuál es la base y cuál es el exponente.
b) ¿Es necesario el uso de paréntesis?, ¿por qué?
c) En el primer caso, ¿primero se eleva al cubo y después se eleva a la cuarta potencia o primero se eleva a la cuarta potencia y luego se desarrollan los cubos? Justifiquen su respuesta.
d) ¿Cómo se procede con el cálculo en la segunda operación?
e) ¿Cuál es el resultado en cada caso?
f) ¿Qué regla o procedimiento pueden utilizar para calcular este tipo de expresiones?

Compartan sus respuestas con otras parejas y de forma grupal lleguen a un acuerdo sobre la forma de proceder en estos casos, redacten un enunciado del tipo: "Para calcular el exponente que resulta de elevar una potencia a otra potencia se debe…"

En concreto

Si a es un número entero y n, m son enteros no negativos (0, 1, 2, 3…), se cumple la siguiente regla:

$$(a^n)^m = a^{nm}$$

Por ejemplo, si $a = 4$, $n = 2$, $m = 3$, por un lado, se tiene que:

$$\begin{aligned}(4^2)^3 &= 4^2 \times 4^2 \times 4^2\\ &= (4\times4)\times(4\times4)\times(4\times4)\\ &= 16\times16\times16\\ &= 4096\end{aligned}$$

Por otro lado:

$4^{2\times3} = 4^6 = 4\times4\times4\times 4\times4\times4 = 4096$

Por lo que se cumple:

$$(4^2)^3 = 4^{2\times3}$$

Considera las siguientes igualdades:

$(2^3)^2 = (2^2)^3$ $(2^5)^2 = (2^2)^5$ $(3^2)^4 = (3^4)^2$

Analiza las expresiones anteriores y responde lo que se solicita.

a) Comprueba cada una de las igualdades.
b) ¿Qué de peculiar notas en el orden de los exponentes?
c) De acuerdo con lo observado en el inciso anterior, proporciona otros tres ejemplos similares, verifica que estén bien planteados y redacta un resultado general al respecto.
d) Escribe en el recuadro, el exponente que hace válida cada operación.

$(2^{\square})^3 = 2^{12}$ $(6^5)^{\square} = 6^5$ $(5^4)^4 = 5^{\square}$

$(3^2)^{\square} = 3^{10}$ $(3^{\square})^4 = 3^{\square}$

Reúnete con un compañero para verificar tus respuestas y determinen cuál es la relación entre esta actividad y lo realizado en la anterior.

Cocientes de potencias

Analicen los ejemplos que se presentan en cada caso y contesten lo que se te solicita.

a) Para dividir 7^5 entre 7^3, se puede proceder de dos maneras:

Procedimiento 1	Procedimiento 2
$\frac{7^5}{7^3} = \frac{7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7}{7 \times 7 \times 7}$ $= \frac{7}{7} \times \frac{7}{7} \times \frac{7}{7} \times 7 \times 7$ $= 1 \times 1 \times 1 \times 7 \times 7$ $= 7 \times 7 = 7^2$	$\frac{7^5}{7^3} = \frac{\cancel{7} \times \cancel{7} \times \cancel{7} \times 7 \times 7}{\cancel{7} \times \cancel{7} \times \cancel{7}}$ $= 7 \times 7 = 7^2$

- ¿En qué se parecen y en qué difieren ambos procedimientos?
- En el procedimiento 2, ¿por qué se justifica cancelar, eliminar, tachar o simplificar tres factores?
- ¿Cuál procedimiento parece más práctico? ¿Es válida dicha forma de proceder? Justifiquen.
- ¿Notan alguna relación entre los exponentes de las potencias del numerador y denominador y el exponente del resultado?, ¿cuál es?

b) Para dividir 6^3 entre 6^3 se simplifican los factores en común tanto en el numerador como en el denominador.

$$\frac{6^3}{6^3} = \frac{\cancel{6} \times \cancel{6} \times \cancel{6}}{\cancel{6} \times \cancel{6} \times \cancel{6}} = ?$$

- ¿Qué pasa en este caso?, ¿cuál es el resultado?, ¿por qué?

c) Para dividir 5^3 entre 5^6 se procede como sigue:

$$\frac{5^3}{5^6} = \frac{\cancel{5} \times \cancel{5} \times \cancel{5}}{\cancel{5} \times \cancel{5} \times \cancel{5} \times 5 \times 5 \times 5} = ?$$

- ¿Cuál es el resultado en este caso?, ¿por qué?

Comparen sus resultados con otras parejas y, en conjunto, determinen una regla para dividir potencias de la misma base.

Pon a prueba todo lo que has aprendido sobre potencias y calcula lo siguiente:

a) $(6^3)^2$ ***b***) 0^5 ***c***) $\left(\frac{2}{3}\right)^5$ ***d***) $\frac{10^8}{10^9}$ ***e***) $\left(3^4\right)^0$

De forma grupal, comprueben sus respuestas y determinen una forma de proceder al enfrentarse a cálculos de potencias.

Visión matemática

Toma en cuenta que el cálculo $5^4 \times 5^4 = 625 \times 625 = 390625$ es correcto pero lo que se persigue en esta lección es que usando adecuadamente las propiedades de las potencias logres sim- simplificar los cálculos así como abreviar los resultados. En este caso:

$$5^4 \times 5^4 = 5^8$$

En concreto

Si a es un número entero distinto de cero ($a \neq 0$) y n, m son enteros no negativos (0, 1, 2, 3...), entonces se cumple lo siguiente:

$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ cuando $n > m$.

$\frac{a^n}{a^m} = \frac{1}{a^{m-n}}$ cuando $m > n$.

Por ejemplo, si $a = 3$, $n = 2$ y $m = 4$, se cumple $m > n$ y, por lo tanto, se satisface:

$$\frac{3^2}{3^4} = \frac{1}{3^{4-2}} = \frac{1}{3^2}$$

En general, al dividir dos potencias de la misma base, en el resultado se conserva la base pero los exponentes se restan. Por ejemplo:

$$\frac{2^8}{2^5} = 2^{8-5} = 2^3$$

En el caso $\frac{2^5}{2^8}$, se obtiene $2^{5-8} = 2^{-3}$, por lo que es necesario definir una potencia entera con exponente negativo.

Si $a \neq 0$ y n es un entero positivo (1, 2, 3...) se define:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

En el ejemplo anterior:

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3}.$$

Potencias con exponente cero y negativo

Quizá te surgieron dudas al calcular los resultados en dos casos del cociente de potencias: cuando los exponentes en las potencias del numerador y denominador son iguales y cuando el exponente de la potencia del numerador es menor que el exponente de la potencia del denominador.

Como un ejemplo particular del primer caso, considera el siguiente cálculo:

$$\frac{8^3}{8^3} = \frac{8 \times 8 \times 8}{8 \times 8 \times 8} = \frac{512}{512} = 1$$

Por otro lado, usando la relación entre los exponentes de dos potencias que se dividen se obtiene lo siguiente:

$$\frac{8^3}{8^3} = 8^{3-3} = 8^0$$

Analiza lo expuesto y da respuesta a cada planteamiento.

a) ¿Por qué el primer resultado es igual a 1?, ¿es necesario desarrollar las potencias?

b) ¿Qué significado puede tener el exponente cero en el segundo resultado?, ¿a qué sería igual esa potencia?

c) Usando ambos resultados ¿qué se puede concluir?, ¿por qué?

Reúnete con un compañero, compartan sus ideas sobre esta relación y en conjunto determinen si lo observado también se cumple en potencias cuya base es un número fraccionario o decimal.

Ahora, como un ejemplo del segundo caso, considera el siguiente cálculo:

$$\frac{8^3}{8^5} = \frac{8 \times 8 \times 8}{8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8} = \frac{512}{32\,768} = \frac{1}{64} = \frac{1}{8^2}$$

Por otra parte, aplicando la relación entre los exponentes de dos potencias que se dividen, se obtiene lo siguiente:

$$\frac{8^3}{8^5} = 8^{3-5} = 8^{-2}$$

Analiza lo anterior y da respuesta a cada planteamiento.

a) ¿Qué procedimiento se siguió para obtener el primer resultado?

b) ¿Por qué es necesario establecer la última igualdad $\frac{1}{64} = \frac{1}{8^2}$ en el primer desarrollo?

c) ¿Cuál sería el significado del exponente negativo en el segundo resultado?, ¿cuál crees que debería ser el resultado en ese caso?

d) Usando ambos resultados ¿qué se puede concluir?, ¿por qué?

Reúnete con un compañero, compartan sus ideas sobre esta relación y, en conjunto, determinen si lo observado también se cumple en potencias cuya base es un número fraccionario o decimal.

Potencias de base 10

Las potencias de base 10 pueden usarse en ciencias como la química y la astronomía que requieren del manejo y cálculo de cantidades muy grandes o muy pequeñas. Por ejemplo, el peso de un *protón*, una partícula de carga positiva en el átomo, es aproximadamente igual a 0.00000000000000000000000165 g o la distancia promedio de la Tierra al Sol que es de 149 600 000 km.

Realiza lo que se solicita en cada caso.

a) Completa la siguiente tabla de potencias de base 10. Guíate por los ejemplos.

10^5	100 000
10^4	
10^3	
10^2	
10^1	
10^0	
10^{-1}	0.1
10^{-2}	
10^{-3}	
10^{-4}	
10^{-5}	

a) Establece entre qué potencias de base 10 se encuentran las cantidades mencionadas en el párrafo introductorio. Para ello, completa los siguientes enunciados:

0.000 000 000 000 000 000 000 001 65 es mayor que $10^{\square}$ y menor que $10^{\square}$, es decir:

$$10^{\square} < 0.000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,001\,65 < 10^{\square}$$

149 600 000 es mayor que $10^{\square}$ y menor que $10^{\square}$, es decir:

$$10^{\square} < 149\,600\,000 < 10^{\square}$$

Reúnete con un compañero, verifiquen sus respuestas, corrijan lo que sea necesario. Investiguen otras cantidades muy grandes o muy pequeñas usadas en la asignatura de Ciencias y compárenlas con respecto a potencias de base 10.

Biblioteca

En el libro *50 cosas que hay que saber sobre matemáticas* de Tony Crilly, lee el segundo apartado titulado "Sistemas numéricos" para que conozcas las ventajas de usar el sistema de valor posicional decimal y descubras el sistema binario que opera con las potencias de base dos.

También puedes pedir una sugerencia bibliográfica a tu profesor sobre el tema para que puedas indagar más al respecto.

Se puede hacer uso de las potencias de base 10 para que muchas de las cantidades que se manejan en el ámbito científico sean fáciles de operar.

Observen los siguientes cálculos:

$$1\,496\,000\,000 \times 10^{-1} = 149\,600\,000$$
$$149\,600\,000 \times 10^{0} = 149\,600\,000$$
$$14\,960\,000 \times 10^{1} = 149\,600\,000$$
$$1\,496\,000 \times 10^{2} = 149\,600\,000$$
$$149\,600 \times 10^{3} = 149\,600\,000$$
$$14\,960 \times 10^{4} = 149\,600\,000$$
$$1\,496 \times 10^{5} = 149\,600\,000$$
$$149.6 \times 10^{6} = 149\,600\,000$$
$$14.96 \times 10^{7} = 149\,600\,000$$
$$1.496 \times 10^{8} = 149\,600\,000$$
$$0.1496 \times 10^{9} = 149\,600\,000$$

Den respuesta a lo que se solicita.

a) ¿Qué regularidades observan en los cálculos mostrados?
b) ¿Hay alguna relación entre el exponente de la potencia de base diez y el número de ceros en el resultado? Justifiquen su respuesta.
c) ¿Cuál expresión usarían ustedes para representar el número 149 600 000?, ¿por qué?

Reúnanse con otras parejas para discutir sobre la conveniencia de adoptar una forma común de escribir las cantidades usando potencias de base diez.

Enl@ce

Ingresa a la dirección **https://www3.gobiernodecanarias.org/medusa/eltanquematematico/laspotencias/potencias10/potencias10_p.html** para que hagas un repaso de las potencias de base 10 y conozcas cómo se utilizan para expresar de forma abreviada números de gran magnitud.

Notación científica

Consideren los siguientes datos extraídos de diversas fuentes:

Dato	Notación común o desarrollada	Notación científica
Población mundial actual (2018)	7 600 000 000	7.6×10^{9}
Longitud de la Gran Muralla China	2 400 000 metros	2.4×10^{6} m
Altura del Pico de Orizaba sobre el nivel del mar	5 610 metros	5.61×10^{3} m
Ancho de una hebra de cabello humano	0.0001 metros	1×10^{-4} m
Diámetro promedio de un eritrocito o glóbulo rojo	0.000000007 metros	7×10^{-9} m

Revisen con atención la tabla y respondan lo que se solicita.

a) ¿Cuál es el dato que más les llama la atención?, ¿por qué?
b) ¿Cuál es la unidad de medida del primer dato de la tabla?
c) ¿Qué tienen en común todas las expresiones que están en la columna "Notación científica"? Proporcionen el mayor número de detalles.
d) ¿Hay alguna relación entre el exponente de la potencia base diez en la notación científica y el número de ceros en la notación común o desarrollada? Justifiquen su respuesta.
e) ¿Qué relación perciben entre la magnitud del dato y la potencia de base diez en la notación científica?
f) ¿Qué ventajas les parece que tiene la notación científica respecto a la notación común?

Elijan a un representante grupal para que en el pizarrón escriba las características que posee la escritura en notación científica y transcríbalas en sus cuadernos. Posteriormente, planteen ideas sobre cómo solucionarían los siguientes problemas:

a) ¿Cuántos cabellos humanos, apilados uno sobre otro, serían necesarios para igualar la altura del Pico de Orizaba sobre el nivel del mar?
b) ¿Cuántos glóbulos rojos, dispuestos en fila, se necesitan para igualar la longitud de la Gran Muralla China?

Una vez que los hayan solucionado, planteen problemas similares en los que puedan practicar tanto la notación científica como las propiedades de las potencias.

En concreto

La notación científica es una manera convencional de escribir números grandes o muy pequeños.

La convención es escribir un número como el producto de un número mayor o igual a 1 y menor a 10 y una potencia de 10. Por ejemplo:

El número 300 000 en notación científica se expresa como 3×10^{5}.

El número 0.00085 en notación científica se expresa como 8.5×10^{-4}.

El número $2\,500\,000 = 25 \times 10^{5}$ no está expresado en notación científica porque 25 no es un número menor a 10. La expresión correcta es $2\,500\,000 = 2.5 \times 10^{6}$.

La operación inversa de la potenciación

Corrijo y aprendo

Práctica la notación científica, para ello accede al siguiente enlace https://www.thatquiz.org/es-c/?-j420-l4-p0 y realiza el test. En la parte superior izquierda con la lista desplegable "Largo" puedes modificar la cantidad de ejercicios, selecciona el nivel de dificultad y establece un tiempo límite para responder.

También puedes elegir ejercicios para convertir notación desarrollada a científica o viceversa y añade un reto seleccionando la opción "Ambos" en la lista *Unidades*.

Al final aparece tu resultado, corrige las respuestas incorrectas en tu cuaderno.

Tu conocimiento sobre las potencias es más sólido. De hecho, debes ser capaz de reconocer algunas de ellas. Considera las siguientes igualdades:

$\square^2 = 4 \qquad \square^3 = 8 \qquad \square^4 = -81 \qquad \square^5 = -32$

Responde lo que se solicita.

a) ¿Qué número cumple con la primera igualdad?, ¿el número es único? Argumenta tu respuesta.
b) ¿Cuál es la base que completa de forma correcta la segunda potencia? Justifica si el número es único.
c) ¿Es posible que un número cumpla la tercera igualdad?, ¿por qué?
d) ¿Qué número elevado a la quinta potencia es igual a menos treinta y dos?

Reúnete con un compañero y establezcan condiciones bajo las cuales una expresión del tipo $\square^e = p$ tiene solución. Utilicen ejemplos para poner a prueba las condiciones y reformúlenlas en caso de ser necesario.

Expresiones de la forma $\square^2 = a$, donde la base es desconocida, aparecen con frecuencia al resolver problemas. Al valor de la base b que cumple la igualdad se le llama "raíz cuadrada de a" y se denota como:

$$b = \sqrt{a}$$

Por ejemplo, la expresión $4 = \sqrt{16}$ o $\sqrt{16} = 4$ indica que la raíz cuadrada de 16 es 4.

Por su parte, al valor de la base que cumple con una igualdad de la forma $\square^3 = a$, se le llama "raíz cúbica de a" y se denota como:

$$b = \sqrt[3]{a}$$

Por ejemplo, la expresión $2 = \sqrt[3]{8}$ o $\sqrt[3]{8} = 2$ indica que la raíz cúbica de 8 es 2.

Realicen lo que se solicita a continuación.

a) ¿Qué relación encuentran entre la expresión $b^2 = a$ y la expresión $b = \sqrt{a}$?
b) ¿Qué relación encuentran entre la expresión $b^3 = a$ y la expresión $b = \sqrt[3]{a}$?
c) Planteen un problema que se resuelva con la expresión $b^2 = a$ y con base en los valores de a y b, determinen qué resulta en la expresión $b = \sqrt{a}$.

***d*)** Completen las siguientes tablas de cuadrados y cubos de los primeros números naturales.

Número	Cuadrado
0	0
1	1
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

Número	Cubo
0	0
1	1
2	8
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

En concreto

Las potencias de exponente 2 se llaman *cuadrados* y las de exponente 3 se llaman *cubos*.

***e*)** Con base en el inciso anterior, reescriban la tabla de cuadrados pero ahora en la forma de raíces cuadradas. Guíense por los ejemplos.

Número	Raíz cuadrada
0	
1	
4	
9	
16	4
25	
36	
49	7
64	
81	
100	

***f*)** ¿Qué semejanzas y diferencias observan entre la tabla de cuadrados en el inciso ***d*)** y la tabla de raíces cuadradas en el inciso ***e*)**?

***g*)** ¿Qué semejanza y qué diferencia encuentran entre los símbolos $\sqrt{}$ y $\sqrt[3]{}$?

***h*)** ¿Cuál creen que sea la relación entre los cuadrados y las raíces cuadradas?

***i*)** ¿Cuál sería la raíz cuadrada de un número que no proviene del cuadrado de algún número natural?, ¿por qué?

Comparen sus respuestas con otra parejas y compartan sus ideas sobre cuál es la relación entre las potencias y las raíces.

Raíces positivas y negativas

Tomen en cuenta las siguientes raíces:

$\sqrt{25}$ $\sqrt{-25}$ $-\sqrt{25}$

Analicen a detalle lo anterior y respondan lo que se solicita.

a) ¿Cuál es la diferencia entre cada una de las expresiones?
b) ¿Cuál es el resultado en cada caso?, ¿por qué?
c) Usen dos radicandos diferentes y den ejemplos similares al anterior. Indiquen los resultados en cada expresión y expongan las diferencias que encuentren.

Reúnanse con otras parejas para compartir ideas sobre los posibles resultados de una raíz cuadrada. Establezcan un procedimiento que les permita decidir si una raíz cuadrada tiene o no solución.

Visión matemática

Los elementos de una raíz se indican a continuación:

Radical
Índice
Raíz

$$\sqrt[n]{a} = b$$

Radicando

El signo que indica la operación recibe el nombre de *radical*. El índice es un pequeño número que se coloca en la parte superior izquierda del radical y que señala el tipo de raíz que se va a obtener (cuadrada, cúbica, etc.). El número del que se va a obtener la raíz se denomina *radicando* y la *raíz* es el resultado de la operación.

En el caso de la raíz cuadrada, el índice $n = 2$, por convención, no se escribe.

Considera las siguientes igualdades:

$$2^2 = 4$$

$$(-2)^2 = 4$$

Por lo tanto, se puede decir que $\sqrt{4} = 2$ y $\sqrt{4} = -2$.

Comprueba lo anterior y da respuesta a lo que solicita a continuación.

a) ¿Por qué hay dos resultados para $\sqrt{4}$? ¿Esto puede provocar confusión? Argumenta tu respuesta.
b) Calcula $\sqrt{9}$, $\sqrt{1}$ y $\sqrt{0}$.
c) ¿Todas las raíces cuadradas tienen dos resultados? Justifica tu respuesta.
d) Da un ejemplo de una raíz cuadrada que tenga dos resultados, otra que tenga un solo resultado y otra que no tenga solución. Justifica que cada ejemplo que propones cumple lo que se pide.

Reúnete con un compañero para cotejar respuestas y compartir ideas sobre cómo distinguirían las soluciones de una raíz cuadrada en caso de haber más de una.

Aproximación de raíces cuadradas

Considera la siguiente potencia:

$$\square^2 = 79$$

Realiza lo que se solicita en cada caso.

a) ¿Hay algún número entero que cumpla la igualdad?, ¿por qué?
b) ¿Cuál es el mayor número entero positivo que cumple la propiedad de que elevado al cuadrado se acerca a 79 sin pasarse?
c) ¿Cuál es el menor número entero positivo que cumple la propiedad de que elevado al cuadrado rebasa al número 79?
d) Usando las respuestas de los incisos ***b***) y ***c***), completa las siguientes desigualdades:

$$\square^2 < 79 \text{ y } 79 < \square^2$$

e) Reescribe la desigualdad $\square^2 < 79$ usando el símbolo de raíz cuadrada. Haz lo mismo con la desigualdad $79 < \square^2$. Justifica la reescritura de las desigualdades.
f) ¿Qué has probado con lo anterior?

Usa una calculadora básica para calcular el resultado de $\sqrt{79}$ y comprueba los resultados de la actividad.

En concreto

Una aproximación de un valor numérico se simboliza con ≈.

Como habrás notado, hay muchos números de los que no se puede calcular su raíz cuadrada de forma exacta pues no son el resultado de alguna potencia de exponente dos.

Por ello, la mayoría de métodos que se usan para conocer la raíz cuadrada de un número, salvo con el uso de la calculadora, en muchos casos darán una aproximación al valor real, es decir, un valor que al elevarlo al cuadrado sea aproximadamente igual al número.

La estimación, el redondeo y el truncamiento son formas de hacer aproximaciones.

En equipos de tres personas, investiguen sobre los términos *estimación*, *redondeo* y *truncamiento*; cada integrante puede elegir uno de ellos. Elaboren un cuadro comparativo y den ejemplos para ilustrar cada uno. Presenten el resultado de sus investigaciones de forma grupal para finalmente acordar cuál de los tres conceptos usarán, pues a partir de este momento los resultados de todos los cálculos en los que el resultado no pueda obtenerse de forma exacta deberán coincidir.

Visión matemática

Un cuadro comparativo es un organizador gráfico en el que se asientan las semejanzas y diferencias entre dos o más objetos o conceptos.

Métodos para aproximar raíces cuadradas

Considera el valor de la siguiente raíz:

$$\sqrt{90}$$

Responde lo que se solicita a continuación:

Glosario

Estimar. Calcular de manera cercana aunque muchas veces imprecisa.

a) ¿Qué valor **estimas** que tiene la raíz cuadrada?, ¿por qué?
b) ¿El valor puede ser 5?, ¿por qué?
c) ¿El valor puede ser 50?, ¿por qué?
d) Si te dicen que el valor de la raíz está entre los números enteros 9 y 10, ¿qué valor propondrías como resultado?, ¿por qué?
e) Con base en la respuesta al inciso anterior, ¿es necesario usar cifras decimales para aproximar el resultado de la raíz?¿por qué?
f) Si te dicen que el valor de la raíz cuadrada es menor a 9.5, ¿qué valor eliges como posible resultado?, ¿por qué?
g) ¿Cuántas cifras decimales son necesarias para establecer con exactitud el valor de la raíz cuadrada solicitada? Justifica tu respuesta.

Reúnete con un compañero, discutan si el método anterior es efectivo para calcular raíces cuadradas y también comenten qué nombre le darían.

Ahora se expondrá otro método para calcular la raíz cuadrada.

Sigan con atención los pasos para calcular $\sqrt{140}$ y completen los razonamientos requeridos.

a) ¿La raíz cuadrada de 140 es exacta?, ¿por qué?
b) Determinen dos enteros positivos entre los que se encuentre la raíz. Validen sus elecciones.
c) Ahora elijan dos números con sólo una cifra decimal entre los enteros que determinaron en el inciso anterior.
d) Multipliquen por sí mismos los números decimales que eligieron en el inciso anterior. Completen las multiplicaciones en los siguientes espacios.

× ______	× ______

e) Observen los resultados y determinen si han encontrado el valor de $\sqrt{140}$.

f) Ahora elijan dos números con dos cifras decimales para aproximar $\sqrt{140}$, ¿qué par de números eligen?, ¿por qué?

g) ¿Qué números con tres cifras decimales eligen para aproximar $\sqrt{140}$?, ¿por qué?

Reúnanse con otras parejas y discutan sobre las similitudes y diferencias que encuentran entre este método y el anterior. Además, analicen la eficiencia de cada uno de los métodos para calcular la raíz cuadrada y definan al menos tres razones por las que preferirían el uso de uno sobre el otro.

Con ayuda de una calculadora básica o científica, o si cuentan con los recursos pueden hacer uso de una disponible en Internet, deben idear un método para aproximar la raíz cuadrada de un número sin utilizar las teclas que se indican a continuación (las teclas pueden estar o no presentes de acuerdo al modelo de calculadora).

Seleccionen algunos equipos para que expongan su método, verifiquen la precisión de ellos haciendo algunos cálculos y de forma grupal redacten en sus cuadernos el que les parezca más ingenioso, eficiente o preciso.

Una aplicación de la raíz cuadrada

Lee con atención la siguiente situación.

Roberto es diseñador de interiores y debe colocar tiras de zoclo en una habitación cuadrada. El proceso de colocación se muestra en la siguiente imagen:

Para ello necesita determinar el largo de las tiras que deberá comprar, pero sólo sabe que la habitación tiene un área de 18 m^2.

Analiza el siguiente proceso para descubrir la solución al problema de Roberto.

a) ¿Cuánto mide el lado de la habitación?, ¿cómo obtuviste el resultado?
b) ¿De qué medida debería pedir Roberto las tiras de zoclo?, ¿por qué? ¿Deberá cortar o trozar algunas de ellas?, ¿por qué?
c) Si Roberto debe colocar **baldosas** de 25 cm × 25 cm en el piso de la misma habitación, ¿qué cantidad de ellas deberá comprar? ¿Deberá cortar o trozar algunas de ellas?, ¿por qué?
d) ¿Cuánto pagó en total Roberto en la tienda si cada tira de zoclo costó $2 400 y las losas costaron $75.50 cada una?
e) ¿Cómo resolverían el problema de la colocación de zoclo si la habitación tuviera forma rectangular, de tal manera que ésta conserva la misma área pero su largo es el doble que el ancho?

Compara tus respuestas con un compañero. Revisen y validen los procedimientos que siguió cada uno para resolver el problema y, finalmente, comenten cómo se puede utilizar el concepto de raíz cuadrada en la resolución de este problema.

Glosario

baldosas. Piezas de cerámica, mármol o piedra, de forma cuadrada o rectangular, con las que se cubren suelos o paredes.

πensa

Con el fin de integrar todo lo que aprendiste durante esta secuencia, realiza lo que se te solicita en cada caso.

a) De entre las siguientes opciones, tacha aquéllas que corresponden a reglas que hayas aprendido durante esta lección y que corresponden al cálculo y manejo de las potencias. Toma en cuenta que a y b son bases y m y n son exponentes. Determina si aquellas que no tachaste son válidas o en su caso, corrígelas.

$(a^m)^n = a^{mn}$	$a^{-1} = -a$
$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$	$a^m = m^a$
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ si $m > n$	$a^m \times a^n = a^{m+n}$
$a^0 = 1$ para $a \neq 0$	$a^1 = a$

b) Usando cantidades de un solo dígito, ¿cuál es la mayor potencia que se puede obtener usando los números 1, 2 y 3? Justifica tu respuesta.

c) Si dos potencias tienen el mismo exponente pero distintas bases, ¿cuál de las dos potencias es mayor?, ¿por qué?

d) ¿Cuál es el error que se ha cometido en el siguiente cálculo? Explícalo y corrígelo.

$$2^{(-2)} = -4$$

e) Completa los siguientes enunciados referentes a las raíces.

- El número que se coloca debajo del signo radical se llama ______.
- La raíz cuadrada de 10 es igual a ______ si se aproxima con dos cifras decimales.
- En la expresión $\sqrt{5\,232}$, el índice tiene un valor de ______ y la raíz es igual a ______.
- El valor de la raíz cuadrada positiva de 217 está entre los números enteros ______ y ______.

En plenaria revisan las respuestas a las actividades y hagan una pausa para revisar y corregir los errores más frecuentes.

En concreto

El símbolo ≠ significa *diferente a o no igual a*.

Pruébate

Selecciona la respuesta correcta para cada pregunta.

1. ¿Cuál de los siguientes números incumple con las condiciones de la escritura en notación científica?

   a) 0.5×10^2
   b) 2.8×10^{-3}
   c) 9.95×10^0
   d) 1×10^8

2. Es la raíz cuyo resultado es igual a -3:

   a) $-\sqrt{6}$
   b) $\sqrt{9}$
   c) $-\sqrt{9}$
   d) $\sqrt{6}$

3. ¿Cuántos resultados tiene la operación $\sqrt{0}$?

   a) No es posible calcular la raíz
   b) Uno
   c) Dos
   d) Tres

4. Viajando hacia Toluca me crucé con 8 monjas. Cada una llevaba 8 canastas con 8 cajas de galletas en cada canasta. ¿Cuántas monjas, canastas y cajas de galletas iban hacia Toluca?

   a) 8 monjas, 16 canastas y 24 cajas de galletas
   b) 8 monjas, 16 canastas y 32 cajas de galletas
   c) 8 monjas, 64 canastas y 512 cajas de galletas
   d) 8 monjas, 64 canastas y 4 096 cajas de galletas

5. ¿Cuál de las siguientes potencias fue calculada de forma incorrecta?

   a) $2^0 = 1$
   b) $1^{10} = 1$
   c) $0^3 = 0$
   d) $3^2 = 6$

6. ¿Cuál es el resultado de la operación $4^2 + 4^2$?

   a) 2^5
   b) 4^4
   c) 8^2
   d) 8^4

Corrijo y aprendo

¿Qué hiciste bien?, ¿en qué te equivocaste? Son dos preguntas que te ayudarán a valorar tu desempeño en cualquier actividad que realices.

Resuelve problemas de proporcionalidad directa e inversa y de reparto proporcional

Empieza

Recuerda lo que sabes del tema de proporcionalidad, puedes aplicar cualquiera de los procedimientos que ya conoces para resolver las siguientes actividades.

a) ¿Cuáles de las siguientes proporciones son correctas? Enciérralas en un círculo.

$\frac{2}{6} = \frac{9}{27}$ $\frac{7}{21} = \frac{2}{6}$

$\frac{4}{16} = \frac{5}{20}$ $\frac{1}{5} = \frac{8}{45}$

$\frac{3}{5} = \frac{8}{12}$ $\frac{4}{5} = \frac{30}{40}$

b) En una fábrica de bebidas, una de las máquinas procesadoras envasa 1 275 latas de jugo de uva por hora, ¿en cuántas horas una máquina puede surtir 17850 latas?

c) Completa la siguiente tabla para conocer el precio final de algunos productos que se encontraban rebajados en un centro comercial.

Artículo	Precio	Descuento	Precio final
Pantalón de dama	350	30 %	
Corbata	140	15 %	
Tenis	900	25 %	
Perfume	1 290	12 %	
Equipo de sonido	4 899	8 %	

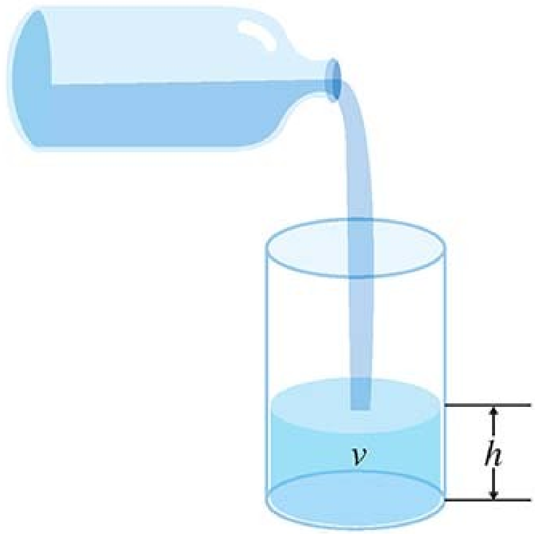
d) Explica cómo puedes calcular mentalmente el 10 % y el 1 % de cierta cantidad.

Avanza

Proporcionalidad

En primer grado estudiaron situaciones que podían ser representadas mediante relaciones entre variables. Realicen las siguientes actividades.

Es necesario que consigan una vasija transparente cilíndrica alta que tenga una capacidad de al menos 5 litros; una botella con capacidad de 1 litro (similares a las mostradas en la imagen inferior) y varios recipientes o botellas de diferentes capacidades; por lo menos, 10 de cada capacidad: 200 mL, 250 mL, 500 mL, 600 mL y 750 mL.



Utilizando la botella, viertan un litro de agua en la vasija y midan la altura que alcanza. Vuelvan a añadir otro litro en la vasija, vuelvan a medir la altura. Sigan repitiendo el mismo procedimiento hasta obtener cinco mediciones para la altura y el volumen. Luego registren los datos obtenidos en la siguiente tabla, donde V representa el volumen y la h altura.

V (mL)	h (centímetros)

Analicen los datos registrados en la tabla y contesten las siguientes preguntas, escriban las respuestas en su cuaderno.

a) ¿Qué sucede con el valor de h cuando el valor de V se duplica?
b) ¿Qué sucede con el valor de h cuando el valor de V se triplica?
c) ¿Qué tipo de relación hay entre los valores de h y los valores de V? Justifiquen su respuesta.
d) Propongan una forma de representar gráficamente el cambio de la altura h con respecto al cambio de V.

Ahora, con la vasija llena, repartan su contenido en los recipientes de acuerdo con su capacidad. Por ejemplo, para repartir cinco litros de agua en recipientes de medio litro (500 mL) se requieren 10 recipientes de la misma capacidad. Si los recipientes no son suficientes para distribuir todo el contenido traten de predecir cuántos de ellos ocuparían. Devuelvan el contenido de los recipientes a la vasija y vuelvan a repartir el contenido pero en recipientes con otra capacidad y realicen lo que se solicita en cada caso.

a) Completen la siguiente tabla:

Capacidad de los recipientes (mL)	Número de recipientes usados
500	10

b) Al repartir todo el contenido de la vasija, ¿qué relación hay entre la capacidad de los recipientes y el número de ellos que se usan para poder distribuirlo?
c) Si la capacidad de los recipientes es de 100 mL, ¿se necesitarán muchos o pocos recipientes para distribuir el agua de la vasija?, ¿por qué? ¿Y si su capacidad es de 1.5 L?
d) ¿Qué diferencia existe en las relaciones que se generan entre las variables de la primera actividad y éstas? Justifiquen su respuesta.

En plenaria, compartan sus resultados. ¿Cómo cambian los datos de las tablas? ¿Qué diferencias observaron en la manera en que se relacionan los datos de las dos actividades anteriores?

Visión matemática

Evita en la medida de lo posible el desperdicio de agua.

Tablas de variación

En muchas situaciones es posible hacer uso de tablas para estudiar ciertas relaciones que se generan entre dos o más variables.

Lee con atención la siguiente situación y responde lo que se te solicita.

En la tortillería de la esquina, la señora Irma elaboró una tabla para determinar los precios por kilogramos de tortilla, debido a que debe atender con rapidez y no puede detenerse en hacer las cuentas de cada pedido. A continuación se presenta un fragmento de la tabla.

Kilogramos de tortilla	Precio sin papel ($)	Precio con papel ($)
1	12.50	13.00
2	25.00	25.50
3	37.50	38.50
4	50.00	51.00
5	62.50	64.00
6	75.00	76.50
7	87.50	89.50
8	100.00	102.00
9	112.50	115.00
10	125.00	127.50

Visión matemática

¿Los precios que se presentan corresponden a los que están vigentes en tu localidad? Investiga el precio del kilogramo de tortilla en tu localidad y elabora una tabla correspondiente. ¿Qué procedimiento utilizarás para elaborarla?

a) ¿Qué relación existe entre los kilogramos de tortilla y el precio, sin incluir el papel para envolverlas?

b) ¿Qué relación existe entre los kilogramos de tortilla y el precio si se toma en cuenta el papel para envolverlas?

c) Con base en las respuestas a los incisos anteriores, ¿cuáles cantidades están relacionadas de manera directamente proporcional?, ¿por qué?

d) ¿Cuánto debe cobrar la señora Irma por un encargo de tres kilos y medio de tortillas suponiendo que el cliente no requiere papel para envolverlas?

e) En tu cuaderno escribe cinco renglones más de la tabla y trata de identificar cuál es la relación entre los kilos de tortilla y el precio que les corresponde si se envuelven con papel.

Ahora, considera que la señora Irma en promedio requiere 400 kg de maíz para surtir la demanda del producto y para ello surte su negocio con costales de 50 kg. Pero ha estado pensando en pedir costales de 20 kg pues muchas veces los de 50 kg son demasiado pesados para manejarlos.

a) ¿Cuántos costales de maíz de 20 kg necesitaría pedir la señora Irma a su proveedor para satisfacer la demanda diaria?
b) Si los costales de maíz fueran de 25 kg, ¿cuántos debería pedir?
c) ¿Qué pasa con el número de costales que debe pedir la señora Irma cuando el peso de los costales disminuye?
d) ¿El peso del costal de maíz y el número total necesario para cubrir el pedido de la señora Irma están relacionados de manera proporcional?, ¿por qué?
e) Completa la tabla que se muestra a continuación la cual indica la relación que existe entre el peso de los costales y el número de ellos que cubren el pedido de la señora Irma, ¿qué notas?

Peso de los costales o sacos (kg)	Número de costales o sacos
10	
20	
40	
50	
80	
100	

f) ¿A quién le sería útil la tabla, a la señora Irma o a su proveedor?, ¿por qué?

Compara tus respuestas con un compañero, expliquen los procedimientos que siguieron para responder y busquen coincidencias y diferencias.

Tipos de proporcionalidad

A partir de las actividades anteriores, debes ser capaz de reconocer con claridad el tipo de situaciones en las que interviene la proporcionalidad.

En concreto

Dos conjuntos de cantidades tienen una relación de *proporcionalidad inversa* si al aumentar una cantidad del primer conjunto disminuye la cantidad correspondiente en el segundo conjunto de manera proporcional y viceversa, cuando una cantidad del primer conjunto disminuye la cantidad correspondiente en el segundo aumenta, de manera proporcional.

Realiza lo que se solicita en cada caso.

***a*)** Determina cuáles de las siguientes cantidades relacionadas lo hacen en forma directamente proporcional.

- El volumen en mililitros de líquido en una vasija cilíndrica y la altura en centímetros que dicho líquido alcanza.
- La capacidad en mililitros de los recipientes y el número de ellos que es necesario para repartir una cantidad fija de líquido.
- El número de kilogramos de tortilla y su precio sin considerar el papel para envolverlas.
- El peso de los costales de maíz y el número de ellos que es necesario pedir para abastecer cierto pedido.

***b*)** ¿Qué procedimientos utilizaste para establecer la relación de proporcionalidad directa?, ¿por qué?

***c*)** ¿Qué notas en las cantidades que a tu criterio no están relacionados de manera proporcional?, ¿cómo varían las cantidades en esos casos?

***d*)** Da un ejemplo de dos cantidades que estén relacionadas pero cuya relación no sea de proporcionalidad. Usa una tabla para mostrar la relación.

***e*)** Describe los tipos de proporcionalidad que identificaste en el desarrollo de estas páginas.

Reúnete con un compañero, comparen respuestas y, en conjunto, expresen sus ideas sobre los diferentes tipos de proporcionalidad que pueden existir. Hagan un registro de las ideas y más tarde compárenlas con los conocimientos que construyan.

Es necesario conocer otro tipo de proporcionalidad.

Lean con atención el siguiente par de situaciones y den respuesta a lo que se solicita.

Un trabajador puede realizar cierta labor en 10 días. ¿Cuánto tiempo invertirá en realizar la misma labor si cuenta con la ayuda de otro trabajador con la misma eficiencia?

Una fotocopiadora puede reproducir 300 páginas en 10 minutos. Si se emplean dos máquinas con la misma eficiencia, ¿en cuánto tiempo reproducirán las mismas páginas?

a) ¿Cuál creen que es la situación más fácil de resolver?, ¿por qué?
b) ¿En qué se parecen ambas situaciones?
c) ¿Cuál es la respuesta en cada caso? Justifiquen las respuestas.

Consideren sólo la primera situación.

a) ¿Qué sucede con el tiempo invertido cuando un mayor número de personas con la misma eficiencia trabajan en la misma labor? Argumenten su respuesta.
b) Consideren el caso de dos trabajadores con la misma eficiencia, ¿por qué en este caso terminarán la labor en la mitad del tiempo?
c) Si se triplica el número trabajadores con la misma eficiencia, ¿se invertirá el triple de tiempo o se reducirá a la tercera parte? ¿Qué pasa si laboran cinco trabajadores con la misma eficiencia? Justifiquen sus respuestas.
d) ¿Cuántos trabajadores deben unirse al trabajador para que pueda completar el trabajo en dos días? Comparen las respuestas de esta pregunta y las del inciso anterior y expliquen las similitudes y diferencias así como los procedimientos utilizados en ambos casos.
e) Recurriendo a tu experiencia en la vida real, piensa por ejemplo en el tiempo que inviertes cuando te reúnes con tus compañeros para realizar una tarea o proyecto. ¿Qué factores intervienen para cumplir con un trabajo o tarea en cierto número de días?
f) En tu cuaderno, elabora una tabla que muestre la relación que existe entre el número de trabajadores y el tiempo invertido en concluir la labor.

Consideren sólo la segunda situación.

a) ¿Qué sucede con el tiempo en el que las fotocopiadoras reproducen cierto número de páginas al poner en funcionamiento un mayor número de máquinas con la misma eficiencia?, ¿por qué?
b En la segunda situación, ¿qué sucede con el tiempo en el que las fotocopiadoras reproducen cierto número de páginas al poner en funcionamiento un mayor número de máquinas con la misma eficiencia?, ¿por qué?
c) ¿En cuánto disminuye el tiempo en el que veinte máquinas fotocopiarán la misma cantidad de páginas?, ¿por qué?
d) En tu cuaderno elabora una tabla que muestre la relación que existe entre el número de fotocopiadoras y el tiempo invertido en reproducir cierto número de páginas.
e) Comenten cuáles son las diferencias que existen entre el trabajo hecho por las fotocopiadoras y la labor de los trabajadores de la primera situación. ¿De qué les sirve conocer lo anterior para dar respuesta a lo que se solicita?

Comparen sus respuestas con otras parejas y discutan los procedimientos mediante los cuales hallaron las respuestas.

Proporcionalidad inversa

La proporcionalidad puede detectarse mediante el análisis de tablas de variación.

Consideren las siguientes tablas de variación y respondan lo que se solicita.

M	2	3	4	8	10
N	6	4	3	1.5	1.2

P	2.5	7	5.5	13	11.5
Q	6.25	17.5	13.75	32.5	28.75

R	2.5	12.5	40	5	2
S	8	1.6	0.5	4	10

U	0.1	0.5	1	5	10
V	0.15	0.75	1.5	7.5	15

En concreto

Dos conjuntos de cantidades relacionadas guardan *proporcionalidad directa* si al dividir una cantidad del primer conjunto entre la cantidad correspondiente en el segundo conjunto se obtiene siempre un mismo valor. Ese valor es la *constante de proporcionalidad directa*.

a) Indiquen cuáles variables muestran relaciones de proporcionalidad directa y expliquen cómo pueden determinar, a partir de la tabla, que dichas variables cumplen este tipo de proporcionalidad.

b) Para las tablas en donde no identificaron relaciones de proporcionalidad directa, intenten definir cómo varían las cantidades presentadas.

c) Observen y analicen el siguiente esquema para explicar la relación entre los valores de U y V.

× 2

U	0.1	0.5	1	5	10
V	0.15	0.75	1.5	7.5	15

× 2

d) Completen el siguiente esquema y determinen en qué es diferente del anterior.

M	2	3	4	8	10
N	6	4	3	1.5	1.2

e) Completen el siguiente esquema. Tengan en cuenta el sentido de las flechas.

R	2.5	12.5	40	5	2
S	8	1.6	0.5	4	10

f) A partir de lo que han observado y deducido, completen las siguientes tablas, de tal manera que las cantidades presentadas guarden una relación de proporcionalidad inversa.

X	*Y*
4	4.5
	1.8
5	
	2.25
12	

X	*Y*
1	
2	
	0.125
10	
20	0.025

En grupo, determinen si la posición horizontal o vertical de la tabla influye para detectar la relación de proporcionalidad inversa.

En concreto

Hay tres métodos con los que puedes resolver situaciones en las que dos conjuntos de datos están relacionados mediante la proporcionalidad inversa:

- La constante de proporcionalidad.
- La reducción a la unidad.
- La regla de tres.

En el grado anterior aplicaste cada uno de ellos en la resolución de problemas de proporcionalidad directa; ahora sólo debes adecuarlos a las condiciones de la proporcionalidad inversa.

Lee la siguiente situación y da respuesta a lo que se te solicita.

Un camión de carga de 2 **toneladas (T)** realiza 6 viajes para transportar cierta cantidad de arena. ¿Cuántos viajes tendría que realizar un camión de carga de 3 toneladas para transportar la misma cantidad de arena?

a) ¿Cómo verificas que esta situación involucra una relación de proporcionalidad inversa? Explica.

b) ¿Cuál de las siguientes opciones plantea un procedimiento correcto para resolver la situación? Justifica tu elección.

Opción 1	Opción 2
2 T ——— 6 v 3 T ——— x $x = \frac{(3\text{ T})(6\text{ v})}{2\text{ T}} = 9\text{ v}$	2 T ——— 6 v 3 T ——— x $x = \frac{(2\text{ T})(6\text{ v})}{3\text{ T}} = 4\text{ v}$

Reúnete con un compañero, comparen respuestas y justifiquen que el procedimiento propuesto en el inciso ***b)*** es válido para resolver este tipo de situaciones. Pónganlo a prueba con otras situaciones que involucren relaciones de proporcionalidad inversa.

Glosario

tonelada (T). Unidad de masa que equivale a 1 000 kilogramos.

Enl@ce

Realiza las actividades 17 a 19 disponibles en el siguiente enlace **http://contenidosdigitales.ulp.edu.ar/exe/matematica1/actividad_172.html** que corresponden al tema de *Proporcionalidad inversa*, para que lo refuerces.

Repartos

Existe otro tipo de situaciones en las que se usa la proporcionalidad.

Lee con atención la siguiente situación y da respuesta a lo que se solicita.

Tú y tu mejor amigo van por la calle, se te antoja un postre de frutas y decides comprarlo, pero tu amigo no lleva dinero.

a) Aunque tu amigo no cooperó, ¿le darías la mitad del postre?, ¿por qué?
b) Si el postre hubiera costado \$20 y tu amigo coopera con \$5 pesos, ¿te parece adecuado darle la cuarta parte del postre? Explica tu respuesta.
c) Explica cómo repartirías los siguientes postres de acuerdo con la cantidad que tú y tu amigo aporten.

Transversalidad

La solidaridad, compañerismo, empatía y demás valores están presentes en la vida del ser humano y son parte de su desarrollo integral.

Estos y otros aspectos de socialización se abordan en Formación Cívica y Ética.

En este contenido, ¿qué valores cívicos se podrían aplicar entre los involucrados en cada caso?

Reúnete con un compañero y discutan las respuestas a las preguntas anteriores. Traten de argumentar la validez de ellas usando el conocimiento matemático que poseen y después den respuesta a cada cuestión que surge de la siguiente situación.

Tú, tu compañero y un desconocido deciden cooperar para comprar las estampas de una colección de edición limitada. Tomen en cuenta que ustedes dos llevaban cierta cantidad de dinero y no hubieran podido adquirir las estampas sin la ayuda del desconocido.

a) ¿Cómo se repartirían las estampas?, ¿por qué?
b) Si el desconocido aportó menos que ustedes, ¿cuántas estampas le corresponden?, ¿por qué?
c) Si el desconocido aportó más de la mitad del costo total de las estampas, ¿cuántas de ellas le corresponden?, ¿por qué?
d) Si desde el principio hubieran acordado que el reparto de las estampas se haría de forma equitativa, no importando el monto de lo aportado, ¿les parece justa esa forma de reparto? Argumenten su respuesta.

Reflexionen sus respuestas y aporten ideas sobre las características que debe poseer una situación de reparto para que se pueda aplicar el conocimiento matemático.

Reparto proporcional

Ahora que han pensado en la posibilidad de realizar repartos usando conceptos matemáticos como el de proporcionalidad, es momento de profundizar.

Lean con atención las siguientes situaciones y den respuesta a lo que se solicita.

Hugo, Paco, Luisa y Fernanda decidieron aportar \$25, \$45, \$50 y \$80, respectivamente, para comprar el boleto para una rifa en la que el gran premio consistía en \$10 000.

a) En caso de resultar ganadores, ¿quién recibiría más dinero del gran premio?, ¿por qué?
b) ¿Quién recibiría menos dinero?
c) ¿Qué cantidad del gran premio le correspondería a Luisa considerando que aportó el doble que Hugo?
d) Si cada uno hubiera aportado \$50 pesos para la compra del boleto, ¿cómo se repartirían el gran premio?, ¿es proporcional el reparto hecho de esta manera? Justifiquen sus respuestas.
e) Cada integrante del equipo proponga una forma de hacer el reparto del gran premio. Usen tablas para consignar las diferentes propuestas y lleguen a un consenso sobre cuál les parece la mejor opción para realizar el reparto.

Tres socios deciden emprender un negocio para lo cual realizan aportaciones de \$10 000, \$20 000 y \$30 000. Durante el primer año de funcionamiento del negocio registran ganancias por \$180 000.

Las siguientes tablas dan cuenta del monto que recibiría cada uno de acuerdo con diferentes propuestas que hicieron los mismos socios.

Primera propuesta		
Socio	**Aportación**	**Ganancias**
1	\$10 000	\$42 000
2	\$20 000	\$60 000
3	\$30 000	\$78 000

Segunda propuesta		
Socio	**Aportación**	**Ganancias**
1	\$10 000	\$30 000
2	\$20 000	\$60 000
3	\$30 000	\$90 000

Tercera propuesta		
Socio	**Aportación**	**Ganancias**
1	\$10 000	\$60 000
2	\$20 000	\$60 000
3	\$30 000	\$60 000

a) A primera vista, ¿cuál les parece la opción más justa para repartir el dinero de las ganancias?, ¿por qué?

b) ¿Cuál es la propuesta que sí toma en cuenta el concepto de proporcionalidad para realizar el reparto? Justifiquen su respuesta.

c) En la primera propuesta, ¿qué parte del total le corresponden de ganancias a cada uno de los socios?, ¿qué tipo de reparto se propone en este caso?

Comparen ambas situaciones, la de la rifa y la de las ganancias, comenten las semejanzas y diferencias entre ambas y, finalmente, comenten cuál les fue más sencilla de resolver.

Enl@ce

En el siguiente enlace http://recursostic.educacion.es/secundaria/edad/2esomatematicas/2quincena4/index2_4.htm da clic en la pestaña **Ejercicios**, da clic en **Repartos proporcionales** y en la lista desplegable elige el tipo de problema que quieras resolver.

πensa

Es momento de concluir, pero antes, realiza las siguientes actividades para que consolides y reafirmes todo lo que aprendiste durante esta secuencia.

a) Coloca una **D** en el recuadro de la derecha si las cantidades mencionadas en el renglón presentan una relación de proporcionalidad directa, una **I** si la relación es de proporcionalidad inversa y una **✘** si no existe alguna relación de proporcionalidad.

El precio del dólar estadounidense y su variación durante un semestre.	
El número de mensajes de texto que envía una persona cada día durante un mes a un número fijo.	
El número de horas trabajadas y el salario de un empleado.	
La cantidad de comida que consume un soldado cuando está en una misión suponiendo que sus provisiones son fijas.	
La cantidad de datos que usas para navegar en Internet y el costo del servicio.	
El número de recolectores y el tiempo que emplean en recoger una cosecha de 12 toneladas.	
La cantidad de litros de agua en un tinaco cada hora suponiendo que el suministro es constante y al principio el tinaco contaba con 200 litros.	

b) Ofrece un ejemplo para ilustrar el siguiente razonamiento incorrecto y explica cuál es el error en el que incurre.

> Dos cantidades mantienen una relación de proporcionalidad inversa si el aumento en una de ellas produce una disminución en la otra y viceversa, es decir, la disminución de una de ellas produce un aumento en la otra.

c) Explica las diferencias entre la proporcionalidad directa, la proporcionalidad inversa y la repartición proporcional. Redacta un problema que ejemplifique cada una y resuélvelos.

d) ¿En qué casos te conviene utilizar el reparto proporcional? Da un ejemplo de tu vida cotidiana y usando el lenguaje matemático explica la solución del problema.

Una vez que comparen y corrijan las respuestas de las actividades, de forma grupal escriban en el pizarrón las ideas y métodos que propusieron y que consideran más efectivos para resolver problemas que involucran relaciones de proporcionalidad y repartos proporcionales.

Pruébate

Selecciona la respuesta correcta para cada pregunta.

1. Ana, Beto y Carmen se reparten una cierta cantidad de dinero de la siguiente forma: Ana se queda con \$200 pesos más que Beto y Carmen se lleva el triple que Beto. Si la cantidad a repartir era \$1 950, ¿cuál es el reparto indicado?

   a) Ana \$650, Beto \$650 y Carmen \$650
   b) Ana \$1 350, Beto \$150 y Carmen \$450
   c) Ana \$550, Beto \$350 y Carmen \$1 050
   d) Ana \$650, Beto \$450 y Carmen \$750

2. Un estudiante estima que debe ahorrar \$25 diarios durante cuarenta días para reunir lo suficiente para comprar un nuevo programa de cómputo, ¿durante cuánto tiempo tendrá que ahorrar para juntar la misma cantidad de dinero si decide incrementar en \$5 su ahorro diario?

   a) 20 días
   b) 30 días
   c) 34 días
   d) 35 días

3. La siguiente tabla muestra una relación de proporcionalidad inversa entre dos cantidades.

2	B	10
A	0.05	0.04

   ¿Cuáles son los valores de A y B, respectivamente?

   a) $A = 0.2$ y $B = 4$
   b) $A = 0.1$ y $B = 8$
   c) $A = 0.2$ y $B = 8$
   d) $A = 0.1$ y $B = 4$

4. Un padre reparte 24 dulces a sus cuatro hijos de forma proporcional a sus edades. Si las edades de sus hijos, del mayor al menor, son 12, 8, 3 y 1, ¿cuántos dulces le corresponden a cada uno?

   a) Le corresponden 6 dulces a cada uno.
   b) Le corresponden 12, 8, 3 y 1 dulces, respectivamente, del mayor al menor.
   c) Le corresponden 12, 8, 3 y 1 dulces, respectivamente, del menor al mayor.
   d) Le corresponden 12, 6, 4 y 2 dulces, respectivamente, del mayor al menor.

Corrijo y aprendo

El resultado de esta evaluación te indica si el procesamiento que haces de la información es efectivo, por ello es importante responder de forma honesta.

Resuelve problemas mediante la formulación y solución algebraica de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

Empieza

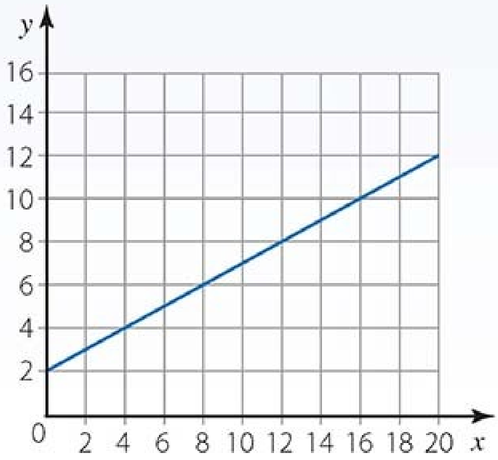
Realiza en tu cuaderno las siguientes actividades de forma individual, para que recuperes tus conocimientos sobre este tema. Después compara las respuestas con un compañero, para que juntos las validen o corrijan lo que sea necesario.

a) Se reparten 48 latas en dos cajas de tal manera que en una caja hay dos latas más que en la otra. ¿Cuántas latas hay en cada caja?

b) Completa la siguiente tabla. Recuerda que las expresiones a ambos lados del signo de igual se llaman miembros y el valor de la incógnita es la solución de la ecuación, es decir, el valor de la literal que hace verdadera la igualdad.

Ecuación	Miembro izquierdo	Miembro derecho	Valor de la incógnita
$x + 5 = 8$			
	$7x + 1$	22	
$8x = 0$			
	$2x + 11$	$2 + x$	
			$x = 3$

c) ¿Cuál es la ecuación de la recta que corresponde a la gráfica que se encuentra a continuación? Escríbela en el recuadro.



$y =$ ______

Avanza

En concreto

El *lenguaje algebraico* posibilita traducir el lenguaje verbal al lenguaje de las matemáticas mediante relaciones entre literales o variables y números, las cuales reciben el nombre de expresiones algebraicas.

Una *expresión algebraica* es una combinación de números y letras encadenados mediante los signos de operaciones aritméticas + y −.

Son ejemplos de expresiones algebraicas:

- $5x^2$
- $-\frac{3}{4}a + 6b$
- $4 - 3x + 2x^3$
- $-y^3$

Un *término algebraico* es una expresión algebraica simplificada que consta de los siguientes elementos:

- Signo
- Coeficiente
- Variable o literal
- Grado

Exponentes

Coeficientes

$$+3x^2y^3z$$

Signo Literales

El *grado* de un término algebraico es la suma de los exponentes de las variables que lo conforman. Por ejemplo, el grado del término $5x^2$ es 2 pero el grado del término $-8ab^2c$ es 4.

El lenguaje algebraico

El grado anterior aprendiste a traducir del lenguaje verbal al lenguaje algebraico y viceversa; ahora, con lo que has aprendido, el abanico de posibilidades para traducir enunciados se ha ampliado.

Responde a lo que se solicita en cada inciso.

a) ¿Qué letra o literal se podría usar para representar el enunciado "La mitad de un número más 5"?, ¿por qué?

b) ¿Cuáles letras se deben usar para representar el enunciado "Dos cantidades guardan una relación de proporcionalidad directa"?, ¿por qué?

c) ¿Cuáles de los siguientes enunciados se pueden representar mediante ecuaciones? Justifica tu respuesta.

- El doble de un número más 10 es igual a 16.
- Tres números pares consecutivos.
- La tercera parte de un número más la quinta parte de otro.
- El triple del cuadrado de un número.
- La diferencia de los cuadrados de dos números consecutivos.
- La raíz cuadrada de un número.
- El cubo de un número es igual a 27.

d) Si t representa el tiempo invertido en realizar un trabajo y p representa el número de trabajadores, ¿cómo se expresa en lenguaje algebraico el siguiente enunciado: "El tiempo invertido en realizar un trabajo es inversamente proporcional al número de trabajadores"?

Compara tus respuestas con las de un compañero y en conjunto completen la siguiente tabla. Tomen en cuenta la información proporcionada en la cápsula **En concreto** y guíense por el ejemplo.

Término algebraico	Signo	Coeficiente	Literal o literales	Grado
m				
$2ab$				
$-xy^3$				
$-\frac{1}{5}mn^2$	−	$\frac{1}{5}$	m, n	3
πr^2				
$1.5v$				

Ecuaciones y relaciones de variación

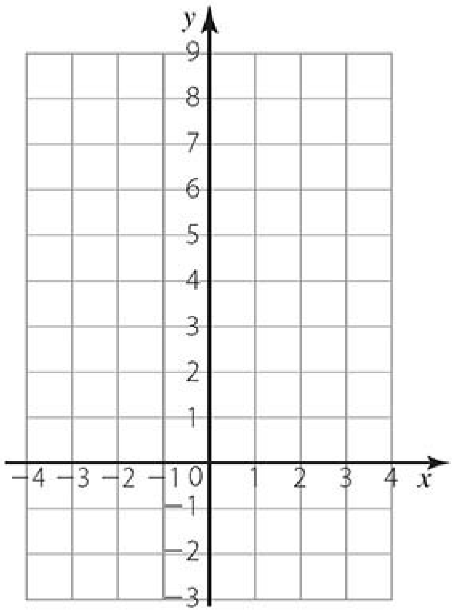
En el grado anterior resolviste ecuaciones lineales y también aprendiste a describir y analizar situaciones de variación lineal mediante su representación algebraica, tabular y gráfica.

Observa con atención las siguientes expresiones y da respuesta a lo que se te solicita.

$$y = 2x + 5 \qquad\qquad y - 2x = 5$$

a) ¿Cuáles son sus semejanzas y sus diferencias?
b) Traduce a lenguaje verbal cada una de ellas y usa este recurso para proponer otra diferencia entre ellas.
c) ¿Cuántas variables o literales aparecen en las ecuaciones lineales que aprendiste a resolver el grado anterior?
d) ¿Alguna de las expresiones anteriores puede ser una ecuación?, ¿por qué?
e) ¿Cuál de las expresiones corresponde a una variación lineal?, ¿por qué?
f) Con base en la respuesta a la pregunta anterior, representa la variación lineal en sus otras dos formas: tabular y gráfica.

x	y
-4	
-2	
0	
1	
2	



g) Usa la otra expresión y dale valores a las literales de tal manera que se cumpla la equivalencia que establece. Compara los pares de valores , con los de la variación lineal, ¿qué notas?
h) ¿Habrá alguna relación entre las ecuaciones y las variaciones lineales?, ¿cuál crees que sea? Explica tus ideas.

Reúnete con un compañero para reflexionar sobre la relación que se genera entre ecuaciones y variaciones lineales. Registren sus ideas.

Problemas con números

Las matemáticas permiten la recreación a través de acertijos o problemas de ingenio.

Consideren el siguiente enunciado y, con base en él, den respuesta a lo que se solicita.

Dos números enteros cumplen que su suma es 25.

Transversalidad

El dominio del español como lengua materna o como segunda lengua, es útil en matemáticas para describir o plantear las situaciones problemáticas.

a) ¿Cuáles son los números que cumplen la condición del enunciado?
b) ¿Por qué hay más de una solución?
c) ¿Qué condición deberían agregar para que la solución sea única? Justifiquen su respuesta.
d) Usen el lenguaje algebraico para traducir el enunciado y decidan si el lenguaje matemático, en este caso, les ayuda a entender el porqué del número de soluciones.
e) ¿Cuántas y cuáles literales usaron para traducir el enunciado al lenguaje algebraico?, ¿por qué?
f) Redacten dos condiciones referentes a relaciones entre números: una de ellas no debe tener solución y la otra debe tener solución única.
g) Hagan uso del lenguaje algebraico para traducir los enunciados que redactaron en el inciso anterior y determinen cómo a partir de las expresiones algebraicas pueden saber si habrá o no solución.

Reúnanse con otras parejas para comentar los conceptos de *existencia* y *unicidad* en la resolución de problemas matemáticos. Pueden recurrir a sus conocimientos anteriores del grado anterior. Lleguen a un acuerdo y escriban una definición para cada uno de ellos. Tomen nota, pues son ideas que aparecerán durante el desarrollo de este tema.

Para abordar situaciones como la anterior, puede ser útil organizar los diferentes valores que pueden asumir las literales.

Consideren el siguiente enunciado y realicen lo que se solicita a continuación.

Dos números enteros son tales que su diferencia es 20 y uno de ellos es el doble del otro.

a) ¿Hay solución a lo planteado con las condiciones del enunciado?, ¿por qué?
b) Al traducir el enunciado al lenguaje algebraico, ¿cuántas literales se deben utilizar?, ¿por qué?
c) Usando el lenguaje algebraico ¿cómo pueden establecer que un número es mayor que el otro?

d) Si el mayor de los números fuera 30, ¿cuánto valdría el otro?, ¿cuánto valdría su diferencia?

e) En su cuaderno reproduzcan una tabla como la siguiente y guiados por el ejemplo, complétenla. Cada integrante del equipo debe completar un renglón.

Número mayor	Número menor	Su diferencia
10	5	5

f) Expliquen por qué en la primera columna de la tabla no pueden aparecer números impares.

g) ¿Es necesario agregar una columna a la tabla para indicar la parte del enunciado que se refiere a que un número es el doble del otro?, ¿por qué?

h) ¿Cuál es la repuesta correcta?, ¿es única? Justifiquen.

De forma grupal, comenten qué tan efectivo consideran el uso de la tabla para encontrar la solución a lo planteado por el enunciado.

X

Ahora considera una variación del problema de los números.

Dos números enteros cumplen que su suma es 14 y su diferencia es 8.

Da respuesta a lo que se solicita en cada caso.

a) ¿Los números que solucionan lo planteado por el enunciado pueden ser iguales?, ¿por qué?

b) ¿Es necesario diferenciar al número mayor y al número menor en este caso?, ¿por qué?

c) ¿Cuántas literales son necesarias para traducir este enunciado al lenguaje algebraico?, ¿por qué?

d) Realiza una tabla en tu cuaderno en la que incluyas la información del enunciado y pruebes con varios números. Guíate por el siguiente ejemplo.

Primer número	Segundo número	Su suma	Su diferencia
10	4	14	6

e) ¿Por qué se tiene que agregar una columna más a la tabla en comparación con la tabla de la actividad anterior? Justifica tu respuesta.

f) ¿Cuál es la respuesta en este caso?, ¿es única?, ¿por qué?

g) Usa una tabla para encontrar los números que se plantean en el siguiente enunciado.

La suma de dos números es 1 y su diferencia es 0, ¿cuáles son los números?

Establece qué tan efectivo te resulta este procedimiento para encontrar la solución.

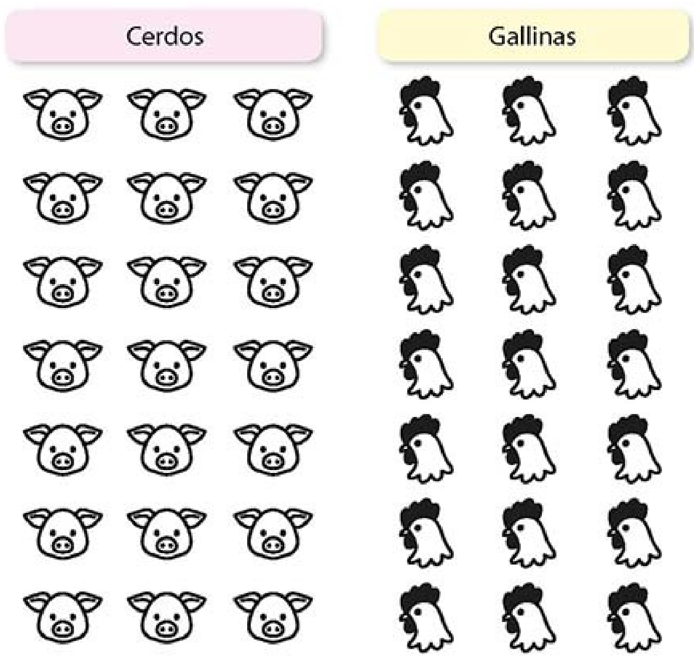
Otro tipo de problema

Existen diferentes tipos de problemas para los cuales puede o no haber solución, en términos matemáticos todo depende de la relación entre los datos que aparecen.

X Considera la siguiente situación y da respuesta a lo que se te solicita.

En una visita a una granja, Laura notó que había 30 animales entre cerdos y gallinas, mientras que Luis contó 84 patas en total. ¿Cuántos cerdos y cuántas gallinas poseen los dueños de la granja?

a) Supón que todos los animales fueran cerdos, ¿cuántas patas debería haber contado Luis?, ¿por qué?
b) Si todos los animales fueran gallinas, ¿cuántas patas debió contar Luis?
c) Usa el siguiente esquema para dar solución al problema. Explica a detalle tu procedimiento.



d) Traduce las condiciones del problema al lenguaje algebraico, ¿qué literales te conviene utilizar?, ¿por qué?
e) ¿Qué puedes hacer con las expresiones algebraicas resultantes para resolver el problema? Explica cómo procederías.

Reúnete con un compañero, comenten los procedimientos con los cuales pueden tratar de resolver el problema y redacten en su cuaderno un problema similar que no tenga solución.

Visión matemática

¿Cómo resolverías tú el problema de los cerdos y las gallinas?

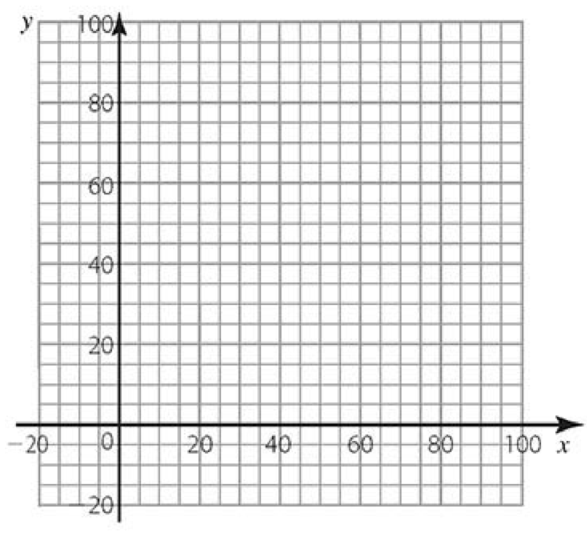
Las ecuaciones y las variaciones lineales

Te habrás percatado que las tablas y algunos recursos visuales pueden ser útiles para resolver problemas. En el caso de las variaciones lineales, recuerda que éstas pueden ser representadas de tres formas: tabular, algebraica y gráfica. A continuación, descubrirás que hay una estrecha relación entre esas representaciones.

Lean con atención la siguiente situación y den respuesta a lo que se solicita.

Para organizar una fiesta, se tuvieron que rentar 24 sillas y 4 mesas; el total de la renta fue de \$276. De acuerdo con los precios vigentes de la empresa que renta el mobiliario, la renta de una mesa es de \$20 más que el de una silla. ¿Cuál es el precio de renta de cada producto?

***a*)** Estimen el precio de la renta de cada producto.
***b*)** Si x representa el precio de renta de una silla y y representa el precio de renta de una mesa, ¿qué expresión algebraica indica que el total de la renta fue de \$276?
***c*)** Usando las mismas literales del inciso anterior, ¿qué representa la expresión algebraica $y = x + 20$? Justifiquen su respuesta.
***d*)** Si consideran la expresión algebraica $y = x + 20$ en su representación gráfica, ¿cuántos valores de y y x satisfacen la condición?
***e*)** Consideren la expresión que encontraron en el inciso ***b*)**. ¿Pueden manipularla algebraicamente para presentarla en la forma de una variación lineal?, ¿cómo lo harían?
***f*)** Dibujen ambas variaciones lineales en el siguiente plano.



***g*)** ¿Las rectas que representan a cada variación lineal se cortan en un punto?, ¿cuál es?
***h*)** ¿Qué relación tiene ese punto con el precio que estimaron en el inciso ***a*)**?

Comparen sus respuestas con otras parejas, discutan por qué las variaciones lineales pueden ser tratadas como ecuaciones y además expliquen la relación que se genera entre las gráficas de las variaciones lineales y la solución de las de ecuaciones lineales.

Hay otras maneras en las que las condiciones de un problema pueden ser abordadas.

Lean con atención la siguiente situación y den respuesta a lo que se solicita.

Visión matemática

¿Les resultaría útil hacer un dibujo para sosolucionar el problema?, ¿por qué?

Francisca y Francisco tienen un negocio de galletas. Han calculado que, para elaborar una galleta de almendras, la materia prima tiene un costo de \$5 y, para elaborar una galleta de chocolate, la materia prima tiene un costo de \$3. Si disponen de \$570 y quieren producir 150 galletas, ¿cuántas galletas de cada tipo podrán elaborar?"

a) Estimen la cantidad de galletas de cada tipo que podrán elaborar.

b) Si x representa la cantidad de galletas de almendras y y representa la cantidad de galletas de chocolate, ¿qué se puede indicar mediante la expresión algebraica $x + y$?

c) Usando las mismas literales del inciso anterior, ¿qué podría representar la expresión algebraica $5x + 3y$? Justifiquen su respuesta.

d) Si x representa la cantidad de galletas de almendras y y representa la cantidad de galletas de chocolate, completen la siguiente tabla. Guíense por los ejemplos. Agreguen en su cuaderno los renglones que sean necesarios para que cada integrante complete un renglón.

x	y	$x + y$	$5x + 3y$
80	70	150	610
70	80	150	590

e) Usando la tabla del inciso anterior, ¿cuál sería la solución del problema? Justifiquen.

f) Encuentran alguna relación entre la solución del inciso anterior y la representación gráfica en el mismo plano cartesiano de las variaciones lineales $x + y = 150$ y $5x + 3y = 570$. Expliquen.

Comparen sus respuestas con otros equipos y, de forma grupal, expliquen cuál es la relación que se establece entre las representaciones algebraica, tabular y gráfica de los sistemas de ecuaciones.

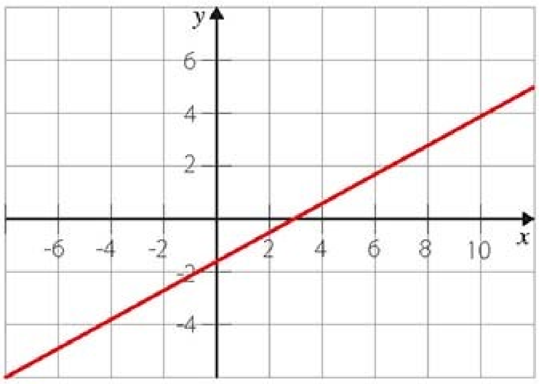
La representación gráfica de los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas y sus soluciones

En las actividades anteriores habrás notado que se generan expresiones algebraicas de un tipo muy particular: pueden ser tratadas como variaciones lineales, pero también como ecuaciones con dos variables.

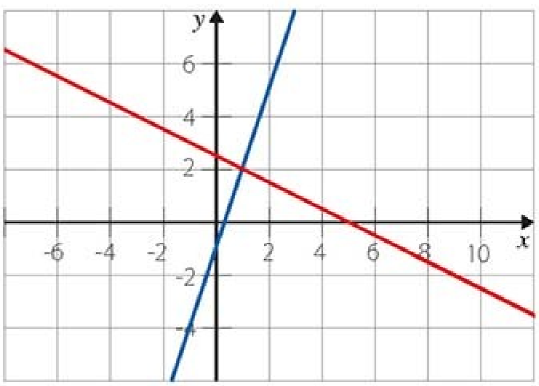
A continuación trabajarás aspectos sobre el número de soluciones de los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Observa las representaciones gráficas I, II y III; lee con atención la cápsula **En concreto** de la siguiente página y da respuesta a lo que se solicita en cada caso.

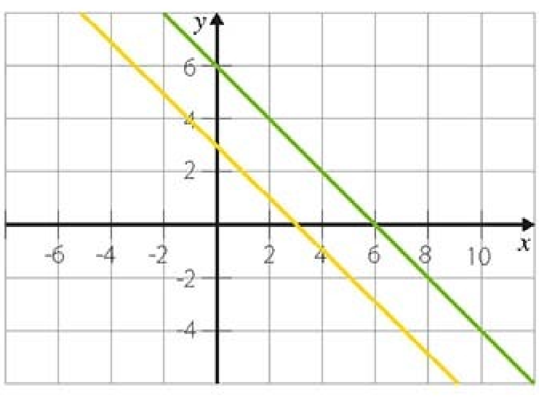
I



II



III



En concreto

Un *sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas* es un conjunto de dos ecuaciones de primer grado (el mayor grado de los términos algebraicos que aparecen es uno) con exactamente dos incógnitas.

Tales sistemas se representan de manera general en la forma:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

Donde x, y son las incógnitas del sistema; a, b, d y e son los coeficientes del sistema; c y f son llamados términos constantes o independientes.

Una *solución* de un sistema lineal de ecuaciones es un par ordenado de números (x, y) de tal manera que al sustituir cada una de las incógnitas, convierte todas las ecuaciones en igualdades numéricas correctas o válidas.

Por ejemplo, la solución del siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$$

es (1 , 2) pues al sustituir el valor de cada una de las incógnitas en el sistema y realizar las operaciones correspondientes se cumplen ambas igualdades.

Respecto de la representación I:

a) ¿Argumenta por qué ilustra un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.
b) Describe la variación lineal que representa esta gráfica.
c) Si consideras esta variación lineal como una ecuación lineal con dos incógnitas, ¿cómo sabes cuántas soluciones tiene?
d) Escribe un enunciado o problema cuyas condiciones se puedan representar con esta gráfica. Justifica el número de soluciones que son posibles.

Respecto de la representación II:

a) ¿Cuáles son las variaciones lineales que determinan esta representación gráfica?
b) A partir de lo hecho en el inciso anterior, determina el sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas de esta representación. Justifica tu procedimiento.
c) ¿Cuántas soluciones tiene este sistema?, ¿por qué?

Respecto de la representación III:

a) ¿Cuáles son las variaciones lineales que determinan esta representación gráfica?
b) A partir de lo hecho en el inciso anterior, determina el sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas que da origen a esta representación. Justifica tu manera de proceder.
c) ¿Cuántas soluciones tiene este sistema?, ¿por qué?

En plenaria, expliquen cuántas soluciones son posibles en la resolución de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas y propongan ideas sobre cómo determinar el número de soluciones sin recurrir a la representación gráfica del sistema. Consignen sus ideas por escrito para que las comparen con lo que aprendan más adelante.

Usen el método gráfico de resolución de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas para resolver las siguientes situaciones.

Carmen tiene \$210 entre billetes de \$50 y billetes de \$20. Si tiene seis billetes en total, ¿con cuántos billetes de cada denominación cuenta?

Juan y Pedro son hermanos. El triple de la edad de Juan y la edad de Pedro son 13 años pero la suma del doble de sus edades son 10 años, ¿cuántos años tiene Juan?

Comparen sus respuestas y procedimientos con otras parejas, discutan qué tan eficiente o práctico es este método de resolución y proporcionen un problema en cuya resolución este método no resulte práctico.

En concreto

Dependiendo de si existen soluciones o no, los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas se clasifican de la siguiente manera:

1. Un sistema es *compatible* si tiene al menos una solución.

Según el número de soluciones que tenga, puede ser:

- *Compatible determinado* si tiene una única solución.
- *Compatible indeterminado* si tiene infinitas soluciones.

2. Un sistema es *incompatible* si no tiene solución.

El método gráfico permite visualizar estas tres situaciones:

El sistema es compatible determinado si las dos rectas se intersecan en un solo punto, cuyas coordenadas son la solución del sistema.

El sistema es compatible indeterminado si las dos rectas coinciden en todos sus puntos, por lo que hay una infinidad de soluciones.

El sistema es incompatible si las rectas son paralelas, es decir, no se intersecan; por lo tanto, no hay solución.

Métodos algebraicos de resolución de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

El método gráfico resulta útil para interpretar un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas y sus soluciones, pero no siempre es conveniente ni fácil realizar la representación por lo que se podría recurrir a métodos que no requieran trazar sino que se limiten a operar con las expresiones algebraicas de las ecuaciones.

Considera la siguiente situación y da respuesta a lo que se solicita en cada caso.

Para organizar una pequeña reunión se compraron 36 bocadillos y 6 **galones (gal)** de jugo. El monto total de lo que se compró fue de $414. Si se sabe que el costo de cada galón de jugo es $20 mayor que el costo de cada bocadillo, ¿cuál es el precio de cada producto?

a) Explica por qué las literales b, g son más convenientes que las literales x, y para representar un bocadillo y un galón de jugo, respectivamente.

b) Comprueba que el siguiente sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas representa de forma adecuada las condiciones del problema:

$$\begin{cases} 36b + 6g = 414 \text{ -------- ecuación I} \\ g = b + 20 \text{ ---- ecuación II} \end{cases}$$

c) Dado que la variable está despejada en la ecuación II del sistema, puedes sustituir este valor en la ecuación I como se muestra a continuación:

$$36b + 6(b + 20) = 414 \text{ ---- ecuación I'}$$

Para simplificar la expresión anterior usa la propiedad distributiva de la multiplicación sobre la suma y usa la reducción de términos semejantes.

d) Resuelve la ecuación resultante en el inciso anterior para la variable b. ¿Cuál es el costo de un bocadillo?

e) Ahora que ya sabes el valor de b sustitúyelo en la ecuación II del sistema original. ¿Cuál es el valor de la incógnita g?

f) ¿Cuál es la solución del sistema?, ¿cuál es la interpretación de esa solución en el contexto del problema?

g) Piensa en las características que debe poseer un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas para que puedas aplicar este método de solución. ¿Qué nombre le darías al método? Justifica tus respuestas.

h) Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones siguiendo el método recién descrito.

$$\begin{cases} 3x - 2y = -2 \\ y = 1 - 2x \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - y = -1 \\ x = 1 + 2y \end{cases}$$

Compara tus respuestas con las de un compañero. Redacten juntos el procedimiento que se debe seguir para resolver un sistema de ecuaciones con este método.

Glosario

galón (gal). Medida de capacidad para líquidos. El galón utilizado en Gran Bretaña equivale a poco más de 4.546 L; el galón empleado en América del Norte equivale a 3.785 L. La equivalencia que se utilizará en este libro es:

1 gal (US) = 3.785 L

Lee con atención la situación y realiza lo que se te solicita.

En una papelería, por dos cuadernos y tres plumas se pagan \$41 y por un cuaderno y cinco plumas de las mismas marcas se pagan \$38. ¿Cuál es el costo de cada cuaderno y de cada pluma?"

a) ¿Qué variables utilizarías para representar un cuaderno y una pluma?, ¿por qué?

b) ¿Por qué se puede afirmar que si por un cuaderno y cinco plumas se pagan \$38, entonces por dos cuadernos y diez plumas se pagarán \$76? Justifica tu respuesta.

c) Justifica que el siguiente sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas plantea de forma correcta el problema.

$$\begin{cases} 2c + 3p = 41 \\ c + 5p = 38 \end{cases}$$

d) Justifica que el siguiente sistema es equivalente al anterior.

$$\begin{cases} 2c + 3p = 41 \\ 2c + 10p = 76 \end{cases}$$

e) Establece la equivalencia entre el sistema anterior y el siguiente:

$$\begin{cases} 2c + 3p = 41 \\ -2c - 10p = -76 \end{cases}$$

¿Qué representa la segunda ecuación del sistema en el contexto del problema? Justifica tu respuesta.

f) Dado que las dos ecuaciones de un sistema se pueden pensar como un conjunto, justifica que se pueden reducir términos semejantes miembro a miembro en el sistema planteado en el inciso **e)**, de lo cual resulta la siguiente ecuación en la incógnita p.

$$-7p = -35$$

g) Usa el valor de p obtenido en el inciso anterior y sustitúyelo en cualquiera de las ecuaciones del sistema original; simplifica las expresiones algebraicas resultantes y resuelve para la incógnita c.

h) Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones, empleando el método recién descrito.

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - 3y = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = -3 \\ -2x - y = 4 \end{cases}$$

Compara tus respuestas con las de un compañero. Establezcan juntos un procedimiento general para resolver un sistema de ecuaciones con este método.

En concreto

Dos *sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas son equivalentes* si tienen las mismas soluciones aunque pueden estar representados por diferentes ecuaciones.

Por ejemplo, los siguientes sistemas son equivalentes ya que ambos tienen como solución al punto (1, 1).

$$\begin{cases} -2x + 3y = 1 \\ 5x - 2y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4x + 6y = 2 \\ 15x - 6y = 9 \end{cases}$$

Visión matemática

¿Qué nombre le darías al método utilizado para resolver este sistema de ecuaciones?, ¿por qué?

Considera lo siguiente y realiza lo que se te solicita en cada caso.

Dos números cumplen lo siguiente: el cuádruple del primero más el segundo es igual a 23, pero el doble del primero menos el segundo es igual a 1, ¿cuáles son los números?

a) Anota las variables que utilizarías para representar las incógnitas en este caso y argumenta por qué.

b) Si x representa al primer número y y representa al segundo número, justifica que el siguiente sistema de ecuaciones plantea de forma adecuada el enunciado del problema.

$$\begin{cases} 4x + y = 23 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

c) Despeja la incógnita y de ambas ecuaciones.

d) Iguala los despejes obtenidos en el inciso anterior y resuelve la ecuación lineal resultante para la incógnita y.

e) Una vez obtenido el valor de y en el inciso anterior, sustitúyelo en cualquiera de las ecuaciones del sistema y encuentra el valor de la incógnita x.

f) Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones, utilizando el método recién descrito.

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y = -2 \\ x + 3y = -2 \end{cases}$$

Junto con un compañero, enlista los pasos a seguir para resolver un sistema de ecuaciones con este método. Discutan los casos en los que es conveniente usarlo.

Con base en los métodos abordados en las actividades anteriores, elijan aquél con el que resolverían los siguientes sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas y en cada caso justifiquen las razones de su elección. Si es necesario, agreguen más sistemas para que cada integrante pueda resolver uno.

$$\begin{cases} -2x + y = 8 \\ -3x - 2y = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ y = 3x + 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - 4y = 32 \\ x - 3y = 17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - y = 10 \\ 8 - y = 6x \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + y = 15 \\ x - 2y = 15 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - 12y = 1 \\ -4x - 9y = 15 \end{cases}$$

Visión matemática

¿Qué nombre le darías a este método utilizado para resolver el sistema de ecuaciones?, ¿por qué?

En concreto

Existen distintos métodos algebraicos para resolver sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, tres de los más comunes son:

- Método de sustitución
- Método de reducción
- Método de igualación

Con la práctica serás tú quien determine cuál de ellos es el más conveniente para resolver el problema al que te enfrentas.

Debido a que cada sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas es muy particular, a continuación se indica a grandes rasgos en qué consiste cada método de resolución de dichos sistemas.

Para resolver un sistema por el *método de sustitución* se despeja una de las incógnitas de una de las ecuaciones y se sustituye esa expresión en la otra ecuación. Se resuelve la ecuación de primer grado en una incógnita que resulta de esta sustitución. Una vez calculada la primera incógnita, se calcula la otra en la ecuación despejada obtenida en el primer paso. (Continúa en la siguiente página).

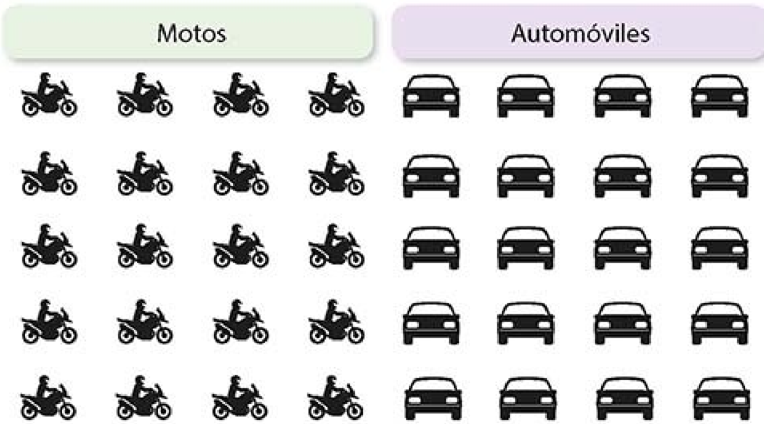
En plenaria revisen las soluciones de los sistemas y determinen si el método de resolución fue el adecuado o si se pudo haber usado otro. Traten de establecer cuáles son las características que deben poseer las ecuaciones de los sistemas para que puedan usar uno u otro método.

Ahora que tienes a tu disposición una diversidad de métodos de resolución de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas tú puedes elegir cuál utilizarás.

Lee con atención la siguiente situación y da respuesta a lo que se solicita:

En un taller mecánico hay espacio para 30 vehículos entre motocicletas y automóviles. Si hay 60 llantas, ¿cuántos vehículos de cada tipo hay en el taller?"

a) Resuelve el problema usando el siguiente esquema.



b) Resuelve el problema con el método gráfico.

c) Entre el método de reducción, el método de sustitución y el método de igualación, ¿cuál escogerías para resolver el problema? Justifica tu respuesta.

Determina cuál de los métodos te pareció el más adecuado para resolver este problema.

En concreto

El *método de reducción* consiste en multiplicar una o ambas ecuaciones por ciertos números de forma que se obtenga un sistema equivalente al inicial en el que los coeficientes de las incógnitas sean iguales pero con signo contrario. A continuación se suman las ecuaciones del sistema para obtener una sola ecuación de primer grado con una incógnita. Una vez encontrado el valor de la primera incógnita, hay dos opciones para hallar la otra: se vuelve a aplicar el mismo procedimiento o se puede sustituir la incógnita hallada en una de las ecuaciones del sistema y despejar la otra.

El *método de igualación* es una variación del método de sustitución. Consiste en despejar una incógnita, la misma, en las dos ecuaciones e igualar el resultado de ambos despejes, con lo que se obtiene una ecuación de primer grado con una sola incógnita. Para calcular el valor de la otra incógnita se sustituye el valor de la primera en cualquiera de las ecuaciones despejadas en el primer paso.

Enl@ce

Da clic en la pestaña "Autoevaluación" que aparece en el siguiente enlace **http://recursostic.educacion.es/secundaria/edad/3esomatematicas/3quincena4/index3_4.htm** y pon aprueba lo que aprendiste durante esta lección.

πensa

Es el momento de que integres todo lo desarrollado en esta secuencia. Sigue las instrucciones y desarrolla las actividades que se plantean a continuación.

a) Escribe en los recuadros **CD** si el sistema es compatible determinado, **CI** si es compatible indeterminado o **I** si es incompatible.

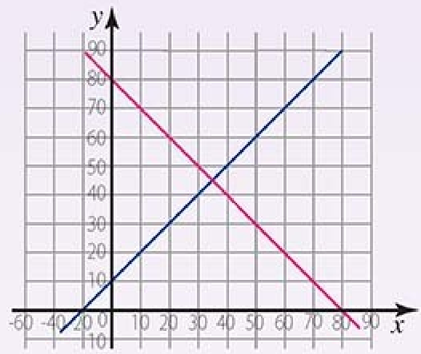
☐ $\begin{cases} 2x - 3y = 2 \\ -2x + 3y = 1 \end{cases}$

☐ $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ -4x + 6y = -2 \end{cases}$

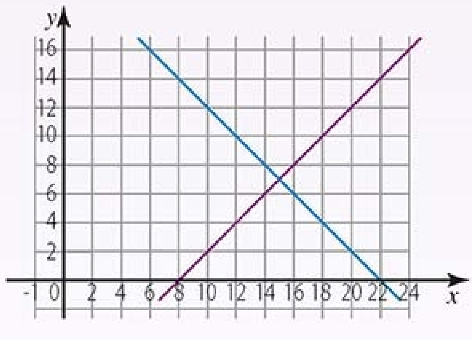
☐ $\begin{cases} -3x - 2y = -1 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$

b) Relaciona cada representación gráfica con la situación que representa. Interpreta la solución en cada caso.

La suma de dos números es 22 y su diferencia es 8. ¿Cuál es el número mayor?



Se vendieron 80 boletos para una obra de teatro. Si hay boletos de niño y boletos de adulto y se sabe que durante la función había 10 adultos más que niños, ¿cuántos adultos asistieron a la función?



Además de verificar las respuestas, es importante que comenten cuál de los métodos de solución de los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas que se abordaron les parece más útil y práctico. También comenten la importancia de que existan diversos métodos para resolver un problema.

Pruébate

Selecciona la respuesta correcta para cada pregunta.

1. ¿Cuál de las siguientes situaciones no puede presentarse al resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas por el método gráfico?

   a) Que las dos rectas sean perpendiculares
   b) Que las dos rectas queden una sobre otra
   c) Que las dos rectas se corten en sus extremos
   d) Que las dos rectas sean paralelas

2. ¿Cuál es la solución del siguiente sistema de ecuaciones?

$$\begin{cases} 3x - y = 1 \\ 2x - 3y = -4 \end{cases}$$

   a) $x = 1, y = -2$
   b) $x = -1, y = 2$
   c) $x = 1, y = 2$
   d) No hay solución

3. ¿Cuál de las siguientes situaciones puede ser planteada y resuelta usando un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas?

   a) Itzel y María gastaron el fin de semana $120 pesos en productos de belleza. El siguiente fin de semana gastarán lo doble. ¿Cuánto gastarán el próximo fin de semana?
   b) Pedro y Roberto fueron a una tortería, consumieron dos tortas y tres refrescos, y pagaron $112. Al día siguiente consumieron tres tortas y dos refrescos idénticos a los del día anterior por lo cual pagaron $133. ¿Cuál es el precio de cada torta y refresco?
   c) Marta y David pagaron $248 por dos entradas para el teatro. ¿Cuál era el costo real de los boletos si los compraron con un 15% de descuento?
   d) La diferencia de dos números es 1 y su producto es 20. ¿Cuáles son los números?

4. Juan y Pedro son hermanos. El triple de la edad de Juan y la edad de Pedro son 13 años pero la suma del doble de sus edades son 10 años, ¿quién es el hermano mayor?

   a) Pedro
   b) Juan
   c) Ninguno, tienen la misma edad
   d) Las condiciones del problema no son consistentes, no hay solución

Corrijo y aprendo

Después de evaluar tu desempeño, ¿hay algo que quieras mejorar? Se honesto y crítico.

Autoevaluación

Completa en este espacio o en tu cuaderno las siguientes oraciones con la finalidad de reflexionar y valorar tu proceso de aprendizaje.

- La secuencia didáctica que más me gustó fue … porque …
- La secuencia didáctica que más se me dificultó fue… porque …
- El tema sobre el que más me gustaría investigar es…
- Entre las muchas cosas que aprendí…
- Participé en las actividades…
- Durante el desarrollo de las actividades me sentí…
- Soy capaz de resolver…

Coevaluación

Intercambia tu libro con un compañero para que de forma crítica y responsable te evalúe.
Marca mediante una ✔ las celdas que señalen el desempeño de tu compañero en cuanto a las **habilidades**, los **valores** y las **actitudes** que muestra durante el trabajo en el aula. Devuelve su libro a tu compañero para que observe su desempeño. Añade una o dos sugerencias constructivas para que pueda mejorar sus puntos débiles.

Piensa de forma crítica	Es honesto	Participa activamente
Piensa de forma creativa	Es responsable	Es innovador
Identifica y resuelve problemas	Es perseverante	Escucha con atención
Aprende de forma autónoma	Es solidario	Busca el diálogo

Heteroevaluación

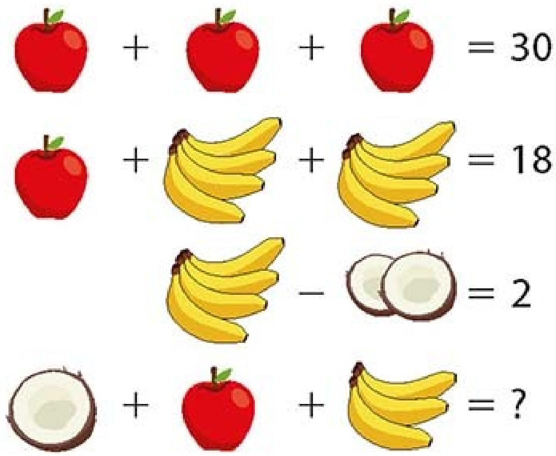
Pide a tu profesor que comparta contigo la respuesta a las siguientes preguntas que te pueden orientar para conducir tu proceso de aprendizaje a un mejor término.

- ¿Cuál sería su valoración del cumplimiento de las metas de aprendizaje a partir de los resultados obtenidos por el estudiante?
- Mencione la secuencia didáctica que el estudiante debe repasar para lograr un mejor entendimiento de la misma.
- Mencione dos aspectos que el estudiante debe mejorar para aprovechar al máximo el tiempo de la clase.

Competencias lectora y matemática

Lee con atención el texto de esta página y responde las preguntas que aparecen en la siguiente.

El problema matemático de las frutas que ha enganchado a dos y medio millones de personas



Esta imagen, publicada en una red social el 30 de enero de 2016, se ha compartido más de 160 000 veces y ha superado los dos y medio millones de comentarios. La autora de la publicación pide ayuda para conocer la respuesta, utiliza **emoticonos** y pide que se comparta para ver si nuestros amigos pueden ayudarle… Bueno, vamos a ayudarle…

Glosario

emoticono. Representación de una expresión facial. Son usados en mensajes electrónicos para indicar el estado de ánimo del que envía el mensaje.

Antes de seguir leyendo y, teniendo en cuenta que te pienso dar la solución, inténtalo.

¿Ya lo has intentado? ¿En serio? Entonces, ¿qué? ¿16? ¿15? ¿14?...

Comienza por asignar un valor literal a las manzanas, otro a los plátanos y otro a los cocos. En la imagen, las primeras tres líneas serían tres ecuaciones y tres incógnitas; si conseguimos resolver el sistema que forman esas tres líneas, la última será una simple suma, ¿no?

El razonamiento es como sigue:

"3 manzanas cuestan 30, eso es porque una manzana vale 10. Una manzana y dos racimos de plátanos valen 18, si quito los diez que vale la manzana, entonces los dos racimos valen 8, es decir, 4 cada uno. Plátanos menos cocos es igual a 2. Ésta es algo más complicada, pero como los plátanos valen 4, pues ya está, los cocos tienen que valer 2 (4 menos 2 son 2).

Resumiendo: manzanas = 10, plátanos = 4, cocos = 2. Así que cocos + manzanas + plátanos = 16, ¿no? ¿Y entonces a qué viene el lío?

Adaptado de: José Ángel Murcia, *El país*, disponible en: https://verne.elpais.com/verne/2016/02/18/articulo/1455778788_314139.html (Consulta: 14 de junio de 2018).

1. ¿Cuál de los siguientes sistemas de ecuaciones resulta adecuado para plantear las primeras tres líneas del problema de las frutas?

a) $m + m + m = 30$
$m + p + p = 18$
$p - c = 2$

b) $3m = 30$
$m + 2p = 18$
$4p - c = 2$

c) $m + m + m = 30$
$m + 4p + p = 18$
$4p - c = 2$

d) $m + m + m = 30$
$m + 4p + 4p = 18$
$4p - 2c = 2$

2. ¿Cuál es la respuesta correcta al problema de las frutas?

a)

 $= 10$

 $= 4$

 $= 2$

b)

 $= 10$

 $= 1$

 $= 1$

c)

 $= 10$

 $= 1$

 $= 2$

d)

 $= 10$

 $= 2$

 $= 1$

3. ¿Cuál es el "lío" al que hace referencia el autor al final del texto?

a) El hecho de que un usuario de redes sociales no pudo resolver un sistema de ecuaciones para conocer el precio de los frutos
b) La supuesta denuncia que hizo una usuaria a través de redes sociales cuando su maestro les planteó el problema de las frutas en clase de matemáticas
c) Las diversas respuestas que multitud de usuarios de la red social propusieron a la publicación hecha por una mujer
d) Lo viral que se volvió una publicación que involucraba el precio exagerado de unas frutas

Corrijo y aprendo

Compara tus respuestas con un compañero para que puedas conocer tu desempeño. Si te equivocaste, vuelve a leer con atención el texto y corrige tus respuestas.

4. El texto continúa y hace alusión a otro acertijo matemático, el cual puedes apreciar en la siguiente imagen:

$$1 + 4 = 5$$
$$2 + 5 = 12$$
$$3 + 6 = 21$$
$$8 + 11 = ?$$

¿Cuál crees que sea la respuesta? Escribe tus ideas con los argumentos que las apoyan.

5. Busca en Internet un acertijo similar al del texto, imprímelo y pégalo o reprodúcelo en el siguiente espacio; después resuélvelo usando el conocimiento matemático que has adquirido. Si no te es posible acceder a internet, inventa un acertijo similar y preséntalo a un compañero para que lo resuelva, él te dirá si el planteamiento que hiciste es correcto o debes mejorarlo.

Proyecto 1

Matemáticas y tecnología

Presentación

La tecnología, como una de las aplicaciones de la ciencia, no podría haberse desarrollado a los niveles actuales sin la ayuda de herramientas matemáticas. La ingeniería ha sacado provecho de ello y actualmente se desarrollan materiales muy pequeños, de tal manera que para poder efectuar comparaciones y cálculos con las cantidades que las describen, es necesario escribirlas con una notación especial, la notación científica.

Durante este proyecto, utilizarán herramientas matemáticas que se abordaron durante el bloque con el fin de entender la nanotecnología como una innovación que puede traer beneficios a la sociedad, pero entendiendo también sus riesgos.

Planeación

Durante esta fase del proyecto deben establecer los objetivos, los productos, los recursos, las actividades y las formas de evaluación del proyecto.

Algunos temas que pueden interesarles son:

a) Nanofiltros para purificar el agua
b) Bloqueadores solares con partículas nanométricas
c) Nanopartículas de oro en el tratamiento contra el cáncer

¿Cuál les parece el más interesante? Consideren otros temas de que hayan escuchado o visto en las noticias.

En los sitios https://www.agenciasinc.es/Noticias/Las-nanoparticulas-de-oro-pueden-activar-farmacos-en-el-interior-de-los-tumores y http://www.journals.unam.mx/index.php/nano/article/view/44953/40519 encontrarán información relacionada a posibles aplicaciones de la nanotecnología.

Utilicen la información para comprender cuáles son las nanotecnologías más viables y con menos riesgos al implementarse y decidir así en qué aspecto de la nanotecnología enfocarán su atención. Utilicen un organizador como el siguiente para regular cada fase del proyecto.

Actividades	Responsables	Recursos y tiempo estimado

Biblioteca

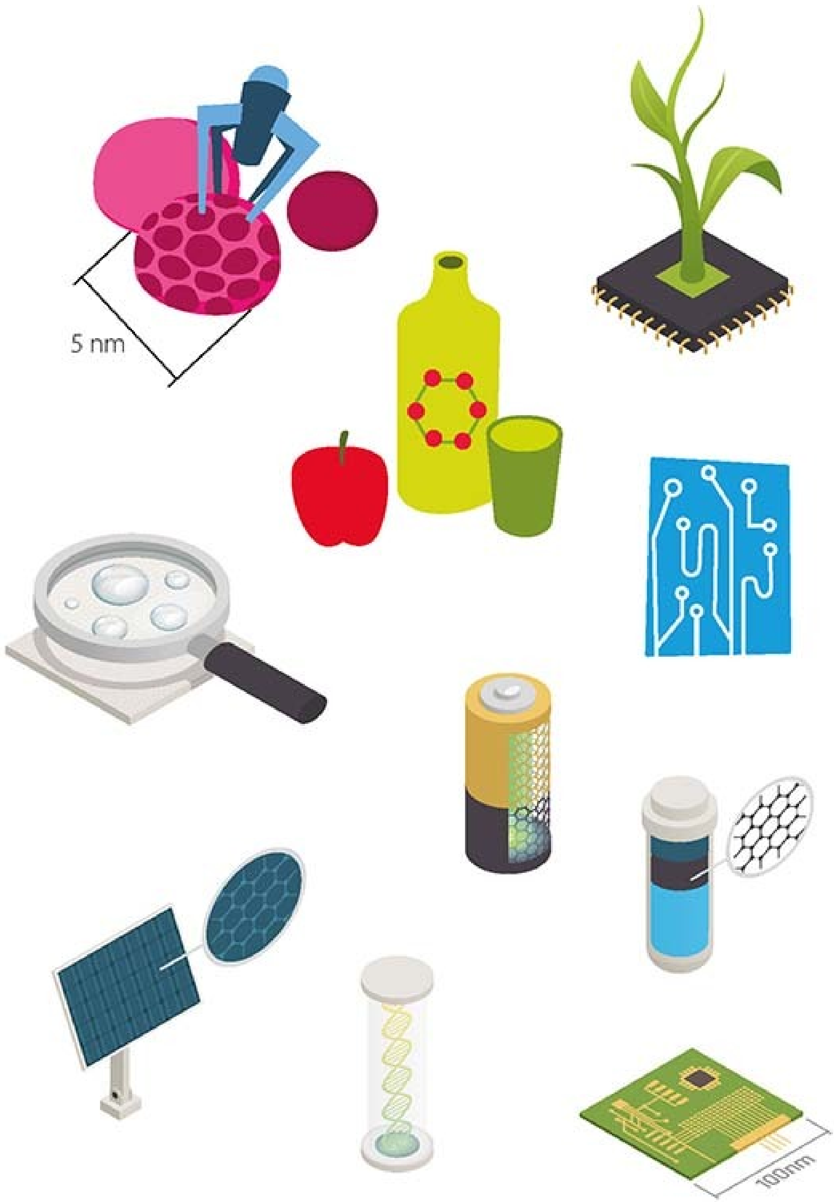
En el libro *Las nanoaventuras del maestro Fonseca* de Jesús Antonio del Río Portilla, encontrarán datos sobre el universo microscópico y sobre su utilidad en los nuevos campos de la ciencia.

Otra opción es el libro *Nanotecnología* de Pedro A. Serena Domingo, en el que conocerán los avances tecnológicos que han hecho posible el mundo a nanoescala.

Desarrollo

Utilicen lo aprendido en este bloque sobre notación científica y comiencen por darse una idea de la nanoescala. Realicen comparaciones de forma matemática y visual.

Por ejemplo, un cabello humano tiene un grosor de 100 000 nanómetros (nm), una bacteria un diámetro de 150 nm, una nanopartícula un tamaño de 3 a 100 nm y el ADN mide unos 2 nm.



Otra manera en la que pueden comparar las magnitudes mencionadas es haciendo uso de sus conocimientos sobre proporcionalidad, pero recuerden que es importante acompañar los números de recursos visuales que hagan amena la presentación de la información.

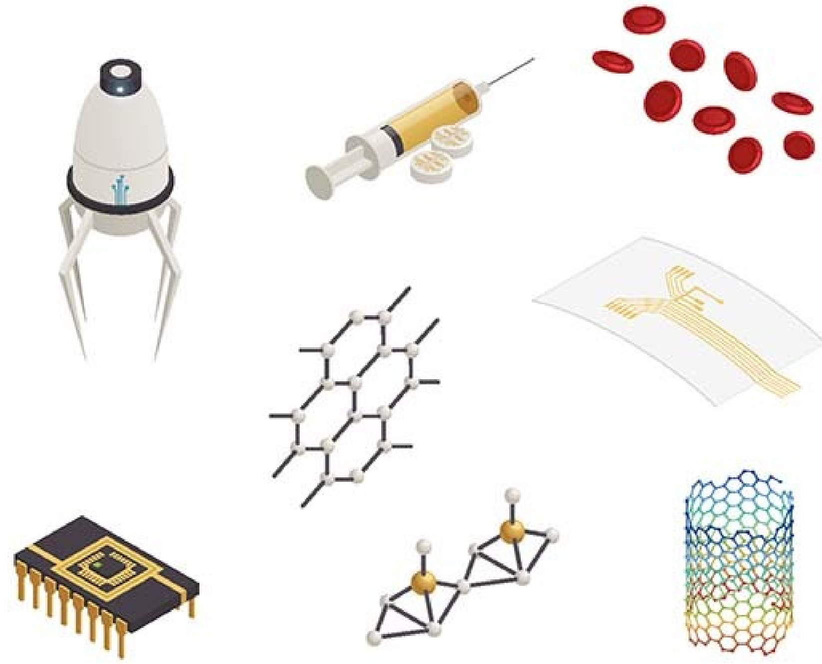
Visión matemática

¿Cuál es la expresión del grosor de un cabello humano en notación científica?, ¿qué tan grande es esa magnitud con respecto a una nanopartícula de 5 nm?

Organicen y plasmen los resultados de su investigación en un reporte por escrito que deberán entregar a su profesor para su valoración.

Comunicación

Para presentar la información producto de su investigación a la comunidad escolar o a los habitantes de su barrio o colonia, pueden realizar folletos o trípticos en papel de reúso o realizar un blog en el que den cuenta de sus potenciales aplicaciones y compartirlo mediante redes sociales: manténganlo actualizado con las noticias y eventos más recientes respecto a la nanotecnología. Además, incluyan los cálculos e ilustraciones que hayan elaborado. No olviden destacar la importancia de los conceptos y del lenguaje matemático para poder entender la nanoescala y su funcionamiento.



Transversalidad

Busquen la orientación de los profesores de Ciencias para desarrollar el filtro con materiales de bajo costo y disponibles en su comunidad.

Evaluación

Evalúen el cumplimiento de las actividades que desarrollaron durante todo el proceso. Consideren sus puntos fuertes y débiles para que puedan mejorar en el próximo proyecto.

Pueden plantear otras preguntas respecto al tema que investigaron para profundizar en él; busquen otras estrategias para abordarlo o elijan otros temas alternativos.

Con lo que aprendieron durante el desarrollo del proyecto, podrían, por ejemplo, proponer una opción barata y accesible para construir un filtro de agua que puede solucionar el problema del desabasto de agua potable en su comunidad. A la hora de implementar el conocimiento, las alternativas son diversas.

Bloque 2

Eje Número, álgebra y variación

Tema: Funciones
Aprendizajes esperados:

- Analiza y compara situaciones de variación lineal y proporcionalidad inversa, a partir de sus representaciones tabular, gráfica y algebraica.
- Interpreta y resuelve problemas que se modelan con este tipo de variación, incluyendo fenómenos de la física y otros contextos.

Tema: Patrones, figuras geométricas y expresiones equivalentes
Aprendizajes esperados:

- Verifica algebraicamente la equivalencia de expresiones de primer grado, formuladas a partir de sucesiones.
- Formula expresiones de primer grado para representar propiedades (perímetros y áreas) de figuras geométricas y verifica equivalencia de expresiones, tanto algebraica como geométricamente (análisis de las figuras).

Forma, espacio y medida

Tema: Figuras y cuerpos geométricos
Aprendizajes esperados:

- Deduce y usa las relaciones entre los ángulos de polígonos en la construcción de polígonos regulares.

Tema: Magnitudes y medidas
Aprendizaje esperado:

- Resuelve problemas que implican conversiones en múltiplos y submúltiplos del metro, litro, kilogramo y de unidades del sistema inglés (yarda, pulgada, galón, onza y libra).

Los contenidos de este bloque te permitirán desarrollar un proyecto en el que conocerás cómo la geometría nutre la cultura y el arte.

Analiza y compara situaciones de variación lineal y proporcionalidad inversa, a partir de sus representaciones tabular, gráfica y algebraica. Interpreta y resuelve problemas que se modelan con este tipo de variación, incluyendo fenómenos de la física y otros contextos

Emπeza

Para que recuperes los conocimientos sobre proporcionalidad que se abordaron en una secuencia anterior realiza lo que se te solicita en cada caso. Es importante que compares tus respuestas con las de un compañero para que las valides o en su caso, las corrijas.

a) Explica por qué las siguientes situaciones no se pueden describir cuando se utiliza la proporcionalidad directa.
- La forma en que se incrementa el área de un cuadrado cuando se incrementa la longitud de sus lados.
- El cambio del precio del dólar respecto al peso mexicano.
- El número de horas que un empleado debe trabajar para mantener a su familia en México.

b) Escribe en el recuadro de la derecha, una **D**, **I** o **N** dependiendo si la proporcionalidad entre los valores es directa, inversa o ninguna de las anteriores.

t	0	2	5	9	15
u	1	7	16	28	46

c	60	12	10	8	2.5
d	1	5	6	7.5	24

h	1	2.5	4	9	15
i	4	10	16	36	60

c) Para cursar una licenciatura en una universidad privada, un estudiante debe pagar \$900 de inscripción única y \$2 800 de colegiatura cuatrimestral. Completa la siguiente tabla para que lo ayudes a conocer la inversión que tiene que realizar durante los tres años de duración de su carrera.

Cuatrimestre	Total ($)
1	3 700
2	
3	
4	
5	

Cuatrimestre	Total ($)
6	
7	
8	
9	

Avanza

Representación tabular de la variación inversamente proporcional

En una secuencia didáctica anterior aprendiste a identificar la proporcionalidad inversa, así como a diferenciarla de la proporcionalidad directa.

Consideren las siguientes tablas:

a	15	12	6	3	1
b	5	4	2	1	$\frac{1}{3}$

c	1	2	3	5	6
d	12	6	4	2.4	2

x	1	2	2.5	10	20
y	5	2.5	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

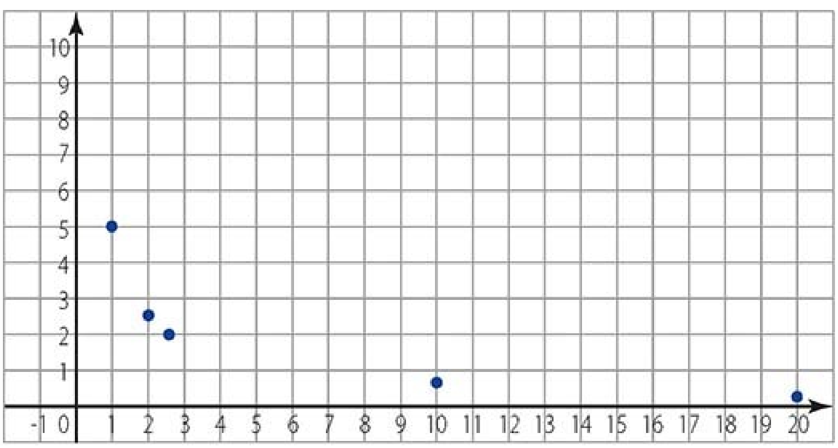
s	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2
t	16	9	4	1	$\frac{1}{4}$

Realicen lo que se solicita a continuación, y responde las preguntas:

a) Coloquen una ✓ a la derecha de las tablas en las que se muestran relaciones de proporcionalidad inversa.

b) De las tablas que marcaron, ¿cómo ubicarían los valores en un plano cartesiano? ¿Por qué es importante el orden en el que se elige a las ordenadas y a las abscisas?

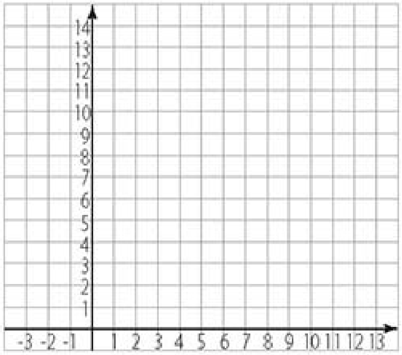
c) ¿A cuál de las tablas corresponde la siguiente gráfica?

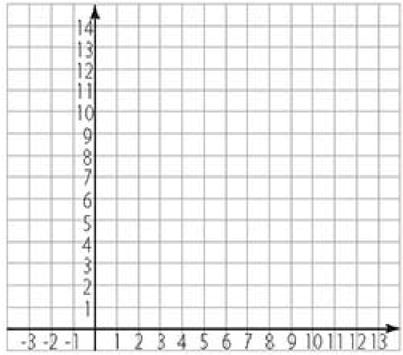


Visión matemática

¿Cuáles son las diferencias y similitudes que hay entre la proporcionalidad directa y la proporcionalidad inversa?

d) Ubica, en los siguientes planos cartesianos, los puntos de la tabla de valores c y d, pero en el primer caso gráfica los puntos en el orden (c, d) y en el otro, en el orden (d, c). Comenta las similitudes y diferencias que observes.





Visión matemática

A partir de los puntos graficados, trata de imaginar qué forma tiene la gráfica que los conecta.

e) Analicen el esquema y completen los enunciados.

c	1	2	3	5	6
d	12	6	4	2.4	2

- Si el valor de c se duplica, el valor de d
- Si el valor de c se triplica, el valor de d
- Si el valor de d se duplica, el valor de c
- Si el valor de d se triplica, el valor de c

f) Decidan cuál de las siguientes expresiones algebraicas representan la relación que hay entre las variables c y d. Justifiquen sus elecciones.

$cd = 12$ $\quad \frac{c}{d} = 12$ $\quad c + d = 12$ $\quad d = \frac{12}{c}$

g) Determinen algunas expresiones algebraicas que representan la relación de proporcionalidad inversa que guardan las variables x, y en la tabla de la página anterior.

Comparen sus respuestas con las de otros equipos, y validen los procedimientos usados.

Observa y analiza la siguiente tabla de valores y responde lo que se te solicita a continuación.

x	y
1	18
2	9
3	6
4	4.5
5	3.6

a) ¿Representa una relación de proporcionalidad inversa?, ¿por qué?
b) Conforme a la tabla, ¿cuál es el producto de las variables por renglón?
c) ¿Qué tendencia siguen los valores de x?, ¿aumentan o disminuyen? ¿Y los valores de y?
d) Si se elige un valor fraccionario o decimal entre 2 y 3 para la variable x, ¿qué valores puede tomar la variable y?
e) ¿Qué valores toma la variable y cuando la variable x es mayor que 5?
f) Si se elige para la variable x un valor fraccionario o decimal menor a 1, ¿qué valor puede tomar la variable y?
g) ¿La variable x puede tomar el valor 0?, ¿por qué? ¿Qué valor tendría la variable y en este caso?
h) Agrega cinco renglones a la tabla, en ellos considera valores positivos fraccionarios y decimales para x cercanos a 0.
i) ¿La variable x puede tomar valores negativos?, ¿por qué?
j) Agrega cinco renglones a la tabla considerando para la variable x valores negativos cercanos a 0.
k) Con base en el análisis anterior, utiliza tu cuaderno para ubicar los puntos (x, y) en el plano cartesiano. Intenta trazar la gráfica que los une. Justifica el trazo hecho.

Presenten ante el grupo sus respuestas y, entre todos, determinen qué tipo de relaciones se presentan entre las variables cuando se considera una correspondencia inversamente proporcional. Es decir, definan qué pasa con una de las variables cuando la otra cambia de manera ligera o **abrupta**.

Visión matemática

La regla de tres es un buen método para resolver problemas de proporcionalidad. Sin embargo, debes considerar que en esta secuencia didáctica lo que se busca es que determines y resuelvas el tipo de proporcionalidad mostrada, partiendo de la información contenida en tablas o bien, en gráficas.

Glosario

abrupta. Hace referencia a un cambio drástico o considerable.

Ya sabes que si el producto de dos variables es constante, entonces se puede afirmar que las variables mantienen una correspondencia inversamente proporcional. Es decir, un aumento en una de ellas produce una disminución proporcional en la otra, y viceversa.

Representaciones algebraica y gráfica de la variación inversamente proporcional

Consideren la expresión algebraica $xy = 8$.

a) Escriban en lenguaje común el significado de la expresión algebraica anterior.
b) Para que se cumpla la igualdad, si x vale 1, ¿cuál es el valor de y?
c) Si x es mayor a 8, ¿qué valores puede tomar y?, ¿por qué?
d) Si x toma valores positivos pequeños, cercanos a cero, ¿qué valores puede tomar y?
e) Si x toma valores negativos, ¿qué valores debe tomar la variable y?, ¿por qué?
f) Al despejar la variable y, ¿cuál es la expresión algebraica resultante?
g) ¿Cuáles son las principales diferencias entre la expresión algebraica que resultó en el inciso anterior y la expresión $xy = 8$?
h) Dada la expresión resultante en el inciso ***f***), ¿cuál es su gráfica?, ¿por qué? Tracen en su cuaderno la gráfica correspondiente de esta variación inversamente proporcional.

Ahora consideren la expresión algebraica $\frac{y}{x} = \frac{3}{2}$.

a) Escriban en lenguaje común el significado de la expresión algebraica anterior.
b) Para que se cumpla la igualdad, si x vale 1, ¿cuál es el valor de y?
c) Si x es un múltiplo de 2, ¿qué valores puede tomar y?, ¿por qué?
d) ¿La variable x puede tomar el valor 0? Justifiquen su respuesta.
e) Si x toma valores negativos, ¿qué valores debe tomar la variable y?, ¿por qué?
f) Al despejar la variable y, ¿cuál es la expresión algebraica resultante?
g) ¿Cuál es la principal diferencia entre la expresión algebraica que resultó en el inciso anterior y la expresión $\frac{y}{x} = \frac{3}{2}$?
h) Dada la expresión resultante en el inciso ***f***), ¿cuál es su gráfica? Argumenten su respuesta y realicen el trazo en su cuaderno.

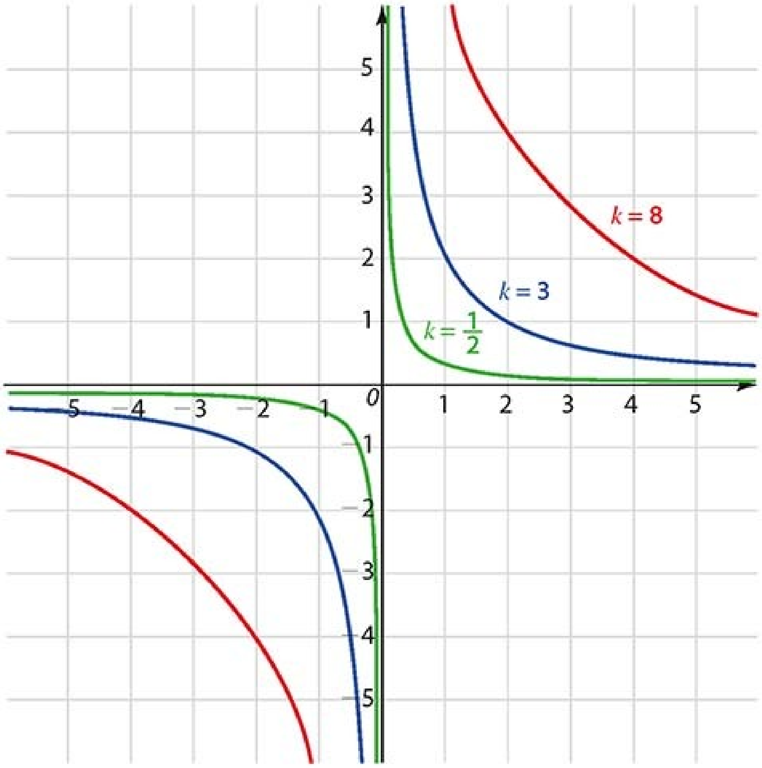
Comparen sus respuestas y el trazo de las gráficas con otras parejas. Concluyan sobre cómo las expresiones algebraicas y las gráficas les son de utilidad para diferenciar entre los diferentes tipos de variación proporcional.

Visión matemática

El lenguaje algebraico es útil para comprender la relación que guardan entre sí dos variables, por ello recuerda lo que aprendiste sobre él en la Secuencia didáctica 5. Resuelve problemas mediante la formulación y solución algebraica de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Hasta el momento han estudiado diversas representaciones de una variación inversamente proporcional. En la siguiente actividad, conocerán con mayor profundidad la representación gráfica.

Observen las siguientes gráficas y respondan lo que se solicita a continuación.



a) Sin considerar el color de las gráficas, establezcan las semejanzas y las diferencias entre ellas.

b) Obtengan cinco puntos que estén sobre la gráfica azul. ¿Cuál es la relación o características que cumplen las coordenadas de dichos puntos? ¿Esa relación se cumple con los puntos de las otras gráficas?

c) ¿Qué pasa con la magnitud de las ordenadas cuando la magnitud de las abscisas crece?, ¿y si el valor de las abscisas decrece?

d) ¿A qué hace referencia el valor de k? Justifiquen su respuesta.

e) ¿En dónde trazarían una gráfica cuyo valor de k sea 6.25? ¿Por qué?

f) Dadas las características observadas en los incisos anteriores, tracen la gráfica que corresponde al valor $k = -1$.

g) ¿Qué pasa con las gráficas cuando x vale cero? ¿Cómo se refleja esto en la expresión algebraica que le corresponde a cada una?

Elijan dos equipos. Cada uno será el encargado de establecer una tabla de valores para las gráficas de color verde y rojo. A partir de ellas y de su análisis, deben ser capaces de formular la expresión algebraica que les corresponde a cada una de las tres gráficas.

Enl@ce

Repasa el tema de "Proporcionalidad" en el siguiente enlace **http://agrega.educacion.es/visualizar/es/es_2009120913_9125302/false** En particular, explora de forma interactiva el problema referente al costo por pasajero en un autobús de renta fija que corresponde a magnitudes inversamente proporcionales.

La rapidez, el tiempo y la distancia

Ahora que has construido diversas ideas y procedimientos para analizar una situación de proporcionalidad inversa, es momento de que descubras una de las aplicaciones de este concepto en otro campo.

En la física, hay multitud de situaciones en las que las variables guardan relaciones entre sí. Un concepto básico es el de rapidez. Como habrás visto en tu curso de Ciencias II, la rapidez es una **magnitud** que relaciona la distancia recorrida por un **móvil** y el tiempo que dura dicho recorrido.

La fórmula que expresa dicha relación es:

$$r = \frac{d}{t}$$

Por ejemplo, si un automóvil viaja con una rapidez constante de veinte kilómetros por hora (lo que se simboliza como 20 km/h), debe entenderse que cada hora que transcurra, el automóvil recorrerá veinte kilómetros; por lo tanto, en dos horas recorrerá 40 km; en tres, 60 km, y así sucesivamente.

Considera que un móvil viaja con una rapidez constante de 60 km/h. Realiza lo que se indica en cada caso.

a) Completa la siguiente tabla.

Rapidez	Distancia	Tiempo
60 km/h		2 horas
60 km/h	60 km	1 hora
60 km/h	30 km	
60 km/h		15 minutos
60 km/h	10 km	

b) A partir de lo anterior, ¿qué sucede con el tiempo cuando el móvil recorre una distancia mayor?

c) ¿Qué sucede con el tiempo cuando el móvil recorre una distancia menor?

d) ¿Qué tipo de relación (directamente proporcional o inversamente proporcional) existe entre las variables distancia y tiempo cuando la rapidez es constante? Justifica tu respuesta.

Compara tus respuestas con las de un compañero. Usando las unidades apropiadas, grafiquen los puntos (Distancia, Tiempo) en un plano cartesiano, y utilicen esa representación para comprobar sus respuestas.

Glosario

móvil. Un objeto que se mueve sin considerar sus dimensiones o las causas de su movimiento.

magnitud. Todo aquello que puede ser medido. Ejemplos de magnitudes son las longitudes, la temperatura o la rapidez.

Visión matemática

Imagina que vas tarde a la escuela, corres y llegas en menos tiempo de lo habitual.

Ahora, usa el lenguaje matemático para explicar la relación entre las variables rapidez y tiempo.

Transversalidad

Si lo consideras necesario, acude con tu profesor de Ciencias para que te ayude a usar el lenguaje matemático con el que le puedes dar sentido a la fórmula de la rapidez y así logres entender las relaciones de variación a que da lugar.

Consideren las siguientes situaciones y respondan lo que se solicita a propósito de cada una.

Cuatro vehículos recorren una distancia de 120 km con diferente rapidez y en diferentes tiempos, los cuales se registran a continuación:

Rapidez (km/h)	15	20	25	30
Tiempo (h)	8	6	4.8	4

a) ¿Son rápidos o lentos los vehículos que emplean poco tiempo en recorrer la distancia? ¿A qué lo atribuyen?

b) En la fórmula de rapidez, sustituyan la variable d con 120. ¿Cuál es la expresión algebraica que resulta? Escríbanla a continuación:

c) A partir de la relación algebraica que escribieron en el inciso anterior, justifiquen que la relación entre la rapidez y el tiempo es inversamente proporcional cuando la distancia es constante.

En una pizzería ofrecen entregar las pizzas en exactamente 30 minutos. De lo contrario, el pedido se le entregará gratis al cliente. Uno de los repartidores tomó nota de la rapidez y la distancia que tendría que recorrer para cumplir el ofrecimiento de la pizzería. Los datos se muestran a continuación:

Rapidez (km/h)	1	1.5	25	4
Tiempo (h)	0.5	0.75	1.25	2

a) A partir de los datos y considerando una distancia de 3 km, ¿cuál debe ser la rapidez del repartidor para cumplir la entrega a tiempo?

b) Si debe recorrer poca distancia para entregar la pizza, ¿es necesario que vaya rápido? Expliquen la respuesta.

c) En general, ¿cuál es la relación (directamente proporcional o inversamente proporcional) entre las variables rapidez y distancia cuando el tiempo es constante?

Respecto de la fórmula de la rapidez $r = \frac{d}{t}$, concluyan sobre los tres tipos de relaciones que se presentan entre las variables cuando una de ellas es constante. Escriban un párrafo explicando su punto de vista. Incluyan ejemplos para ilustrar cada caso.

En concreto

Se dice que dos variables x, y son *directamente proporcionales* siempre que haya una constante k distinta de cero tal que:

$$y = kx$$

La razón constante $k = \frac{y}{x}$ se llama constante de proporcionalidad.

Por otra parte, dos variables son *inversamente proporcionales* siempre que exista una constante k distinta de cero tal que:

$$y = \frac{k}{x}$$

El lenguaje algebraico te puede ayudar a comprender en donde radica la diferencia entre ambas expresiones.

Otros problemas que se modelan con variación inversamente proporcional

Lean cada situación y respondan las preguntas que se encuentran a continuación.

Un grupo de 40 personas, entre estudiantes de secundaria y profesores, deciden organizar un paseo y cuentan con comida suficiente para 3 días. A última hora sólo deciden viajar 30 personas. ¿Para cuántos días alcanzará la comida?

a) Bajo esas condiciones, la comida durará más o menos días. ¿Por qué?
b) ¿Qué pasa si finalmente sólo viaja la mitad de personas?
c) Y si se integran 20 personas más a las 40 iniciales, ¿cuántos días durará la comida?
d) Elaboren una tabla que muestre la variación que se presenta en esta situación dependiendo de si el número de paseantes aumenta o disminuye.

La unidad de medida de almacenamiento de un archivo digital es el **byte**. El tiempo t que toma en descargarse una película desde Internet tiene una variación inversamente proporcional a la velocidad v de la conexión. Una película promedio tarda 48 minutos en descargarse si la velocidad de la conexión es de 256 kb/s (***kilobytes*** por segundo).

a) Expliquen en términos comunes qué relación se da entre la velocidad de conexión y el tiempo de descarga; luego escriban la expresión algebraica que relaciona las variables.
b) ¿Cuál es el tiempo de descarga de la película si la velocidad de la conexión es de 32 kb/s?
c) ¿Cuánto tiempo tardaría en descargarse un archivo de 1 024 kb con una conexión de 32 kb/s?
d) ¿Cuál es el tiempo de descarga de un archivo de 70 ***megabytes*** (Mb) si se cuenta con una velocidad de conexión de 256 kb/s? ¿Qué procedimiento adicional debes considerar para responder esta pregunta?
e) ¿De qué factores depende la velocidad de la conexión? Investiguen al respecto.

Junto con otras parejas, analicen por qué éstas son situaciones de variación inversamente proporcional y den ejemplos de otras situaciones similares en las que esto se presenta de manera cotidiana.

Glosario

byte (b). Conjunto de 8 bits que funge como una unidad y es la cantidad mínima de información que una computadora puede procesar.

kilobyte (kb). Unidad de información digital equivalente a mil bytes.

megabyte (Mb). Unidad de información digital equivalente a un millón de bytes.

πensa

Con la finalidad de que afiances el conocimiento que adquiriste en este bloque, realiza en tu cuaderno las siguientes actividades de forma individual.

a) Elabora un mapa conceptual que relacione los siguientes conceptos: razón, proporción, proporcionalidad directa e inversa, constante de proporcionalidad, variación directamente proporcional y variación inversamente proporcional.

b) Determina cuál de las siguientes tablas muestra una situación de variación inversamente proporcional y redacta un problema que pueda resolverse usando los datos que se muestran.

240	6	4	10	60
2	80	120	48	8

1	10	0	5	2
5	41	1	21	9

1.5	1	2.5	$\frac{3}{4}$	0.5
6	4	10	3	2

c) ¿Cuáles de las siguientes situaciones no representan una variación inversamente proporcional? Explica por qué.

- El tiempo que un móvil, que avanza con rapidez constante, tarda en recorrer cierta distancia.
- El área que ocupa una piscina de forma rectangular al modificar sus dimensiones.
- Los litros de gasolina que un auto consume al aumentar el kilometraje recorrido.

d) Establece dos criterios con los que puedes determinar si cierta situación corresponde o no a una variación inversamente proporcional. Justifica la validez de cada uno.

e) Explica qué características posee una expresión algebraica que determina una variación inversamente proporcional.

En plenaria validen las respuestas y justifiquen los procedimientos que utilizaron para responder. Manifiesten alguna duda o dificultad que encontraron durante las actividades realizadas y propongan de común acuerdo la que consideren la mejor forma de resolverlas.

Corrijo y aprendo

A lo largo de la secuencia pudiste haber encontrado ejercicios que no te resultaron fáciles de resolver. Retómalos y vuelve a intentarlo, localiza los puntos críticos en los que no podías avanzar y corrobora que ya los has superado.

Pruébate

Selecciona la respuesta correcta para cada pregunta.

1. Un automóvil que viaja a 120 km/h tarda 4 horas en llegar de un punto a otro. ¿Cuánto tiempo tardará el vehículo en realizar el mismo traslado si viaja a una velocidad de 90 km/h?

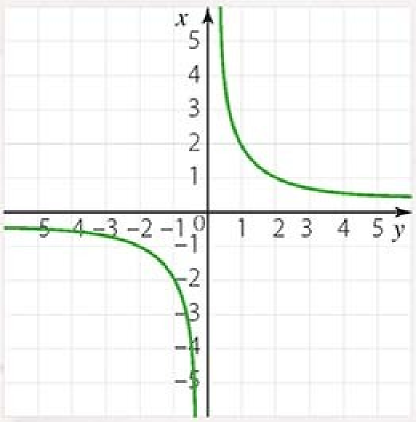
   a) 3 h ***b)*** 5 h 30 min ***c)*** 4.5 h ***d)*** 5 h 20 min

2. Un rectángulo tiene 30 cm de base y 15 cm de altura. ¿Qué altura deberá tener otro rectángulo de 10 cm de base para que tenga la misma superficie que el primero?

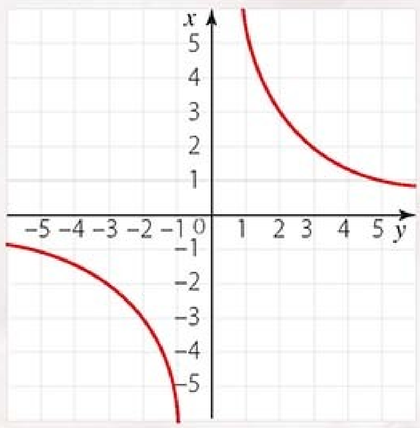
   a) 15 cm ***b)*** 20 cm ***c)*** 30 cm ***d)*** 45 cm

3. ¿Cuál de las siguientes gráficas corresponde a la variación proporcional de la forma $y = \frac{2}{x}$?

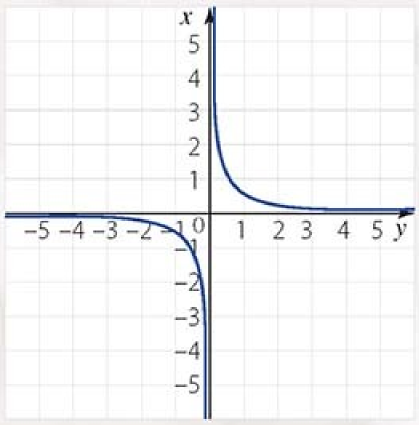
   a)



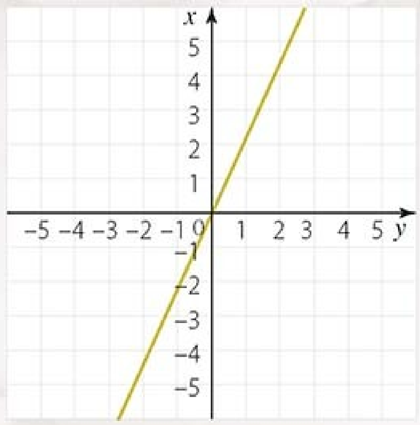
   c)



   b)



   d)



4. ¿Cuál de las siguientes expresiones algebraicas expresa en lenguaje común que la variable x es inversamente proporcional a la variable y?

   a) $y = x + k$ ***b)*** $y = kx$ ***c)*** $y = x$ ***d)*** $xy = k$

5. La velocidad de conexión a Internet se reduce a la mitad, ¿cuánto tiempo demorará en descargarse un archivo digital suponiendo que el tamaño del archivo es de un número fijo de bytes?

   a) La mitad de tiempo ***c)*** El doble de tiempo

   b) El triple de tiempo ***d)*** La cuarta parte de tiempo

Verifica algebraicamente la equivalencia de expresiones de primer grado, formuladas a partir de sucesiones

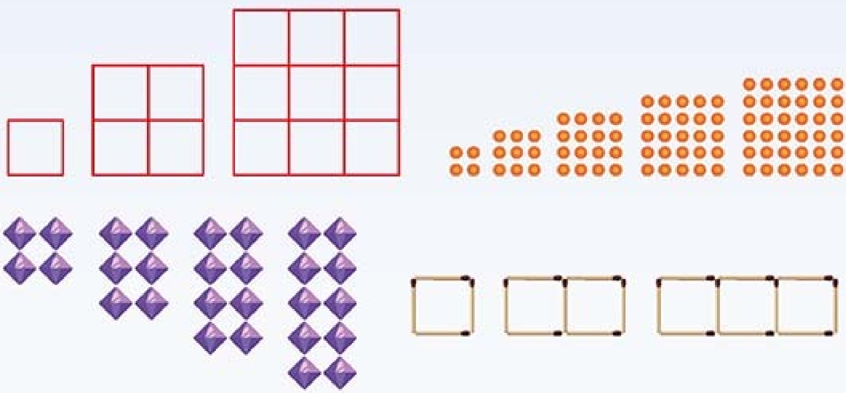
Empieza

Resuelve las siguientes actividades para que recuerdes lo que ya sabes sobre las expresiones algebraicas de primer grado que se generan a partir de sucesiones.

a) Escribe una sucesión numérica cuyo quinto término es 4.

b) Considera la sucesión $-13, -10, -7, \ldots$ Escribe los siguientes cinco términos de la sucesión.

c) Encierra en un círculo a la sucesión de figuras que describe la relación "El primer término es 4 y los sucesivos se obtienen al sumar 3 al anterior".



d) Subraya las sucesiones numéricas que dan lugar a la expresión algebraica $8n + 3$. Considera que n representa un número entero cualquiera, por lo que más de una respuesta es posible.

0, 3, 11, 19, 27, …

$-29, -21, -13, -5, \ldots$

43, 51, 59, 67, 75, …

3, 11, 14, 22, 25, …

En concreto

El conjunto de los números enteros está formado por los números positivos, el cero y los números negativos: {…, -3, -2, 1, 0, 1, 2, 3…}.

Avanza

Las sucesiones de los números pares y de los números impares

Considera el conjunto de números pares:

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20...

Responde las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál es el noveno término?
b) ¿Cuál es el **vigésimo** término?
c) ¿Existe un patrón para crear el orden de la anterior lista de términos?, ¿cuál es?
d) Completa la siguiente tabla que relaciona los números pares de acuerdo con su posición.

Posición	1	2	3	4	5	8	10	15	20	28
Número	2									

e) Si n representa la posición de un término en la sucesión de números pares, ¿qué número par ocupa la posición del término general x_n? ?
f) Ahora observa la siguiente sucesión de figuras que resulta al considerar sólo una parte de los números pares.

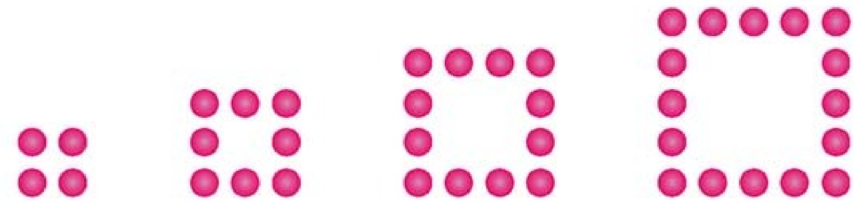


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

Dibuja los siguientes dos términos de la sucesión en el siguiente espacio.

g) ¿Cuántos puntos forman la figura n? Justifica tu respuesta.

Glosario

vigésimo. Que ocupa el lugar número veinte en un conjunto ordenado.

En concreto

Una sucesión $x_1, x_2, x_3, ..., x_n...$ es un conjunto de elementos que cumplen un orden determinado por una regla.

Cada elemento se llama ***término*** y tiene una ***posición*** dentro de la sucesión.

x_n es el término general y n representa la posición que ocupa dicho término.

Considera la siguiente sucesión de figuras:

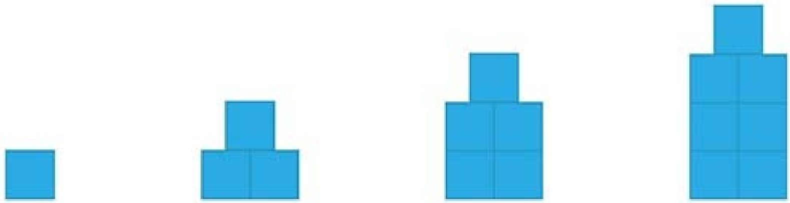


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

Dibuja en el siguiente espacio las dos figuras que continúan la sucesión.

a) ¿Cuántos cuadrados forman la figura 12?, ¿por qué?

b) Completa la siguiente tabla y úsala para determinar la sucesión numérica que se genera a partir de la sucesión de figuras.

Posición	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Número										

c) Observa con atención la siguiente sucesión de figuras que resulta al considerar sólo una parte de los elementos de la sucesión numérica que determinaste en el inciso ***b)***. Determina el número de cuadrados que conforman a la figura n, donde n representa cualquier número entero positivo.

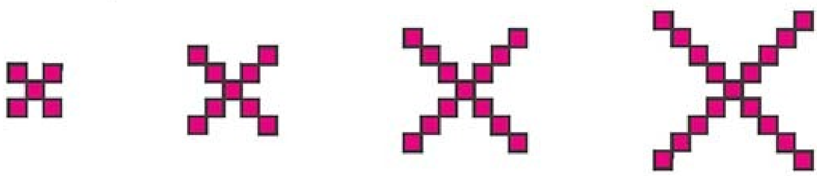


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

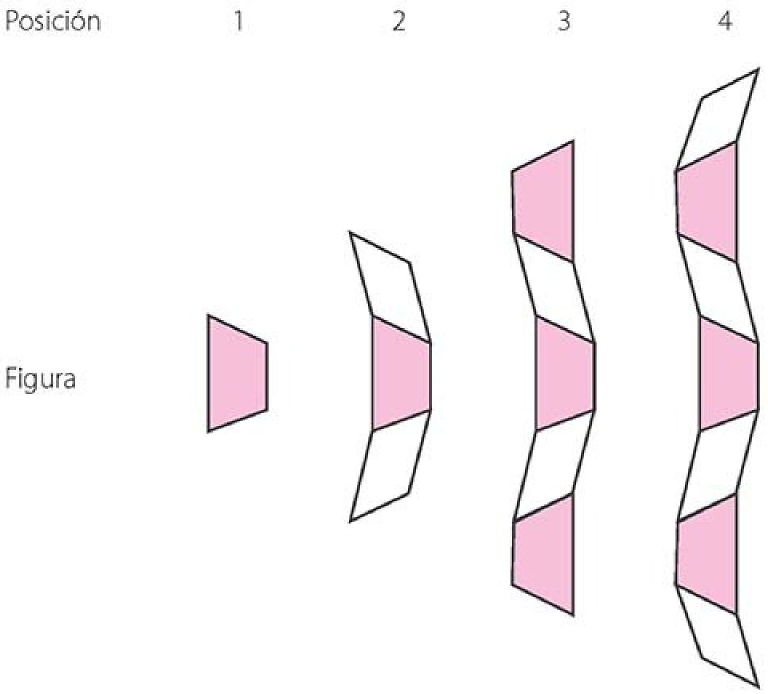
Reúnete con un compañero, revisen sus respuestas y acuerden la solución correcta en aquellas en las que hayan surgido diferencias.

Visión matemática

Puedes escribir los primeros diez o veinte términos de una sucesión para encontrar el patrón o regularidad que hay en ella. Practica y, con el tiempo, serás capaz de entender la regularidad de cualquier sucesión sin enlistar sus términos.

Expresiones algebraicas a partir de sucesiones de figuras

X Considera la siguiente sucesión, en la que cada figura está formada por dos tipos de piezas, rombos y trapecios.



Puedes notar que hay un patrón, cada figura se construye a partir de la anterior. Realiza lo siguiente:

a) Escribe una expresión algebraica que indique el número de piezas de la figura que ocupa la posición n.

b) Explica cómo se relaciona la expresión obtenida en el inciso anterior con la siguiente:

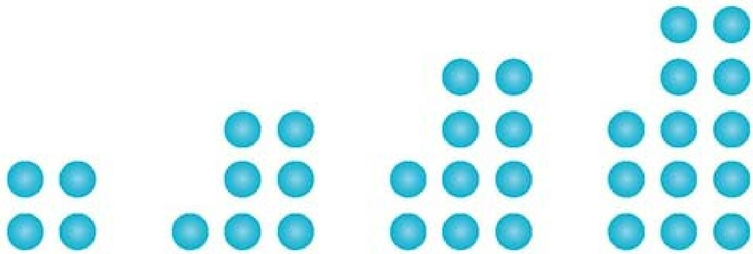
$$2n - 1$$

c) Determina el número de rombos y trapecios que contiene la figura que ocupa el lugar 15.

d) Si en lugar de indicar el número de piezas de la figura que ocupa la posición n se quisiera indicar el número de lados de la figura que ocupa la posición n, ¿cuál sería la expresión algebraica adecuada?

Compara tus respuestas con un compañero y determinen si hay más de una manera de escribir las expresiones algebraicas correspondientes.

Un ejemplo más de sucesiones de figuras se puede ver en la siguiente ilustración. Responde lo que se solicita.



a) ¿Qué regularidad encuentras en esta sucesión?
b) ¿Cuántos puntos conforman los siguientes seis términos?
c) Explica por qué esta sucesión es **aritmética**.
d) Escribe una expresión algebraica que permita saber cuántos puntos tendrá la figura en la ***n*-ésima** posición.
e) En el siguiente espacio dibuja dos sucesiones de figuras que den origen a sucesiones aritméticas para que un compañero conteste las preguntas planteadas en los incisos ***a)***, ***b)***, ***c)*** y ***d)***.

Entre los dos verifiquen si las respuestas son correctas y corrijan los posibles errores.

Glosario

sucesión aritmética. Tiene la característica de que la diferencia de dos elementos consecutivos es siempre un valor constante; es decir, siempre la misma cantidad.

***n*-ésimo**. Que ocupa un lugar indeterminado en una sucesión.

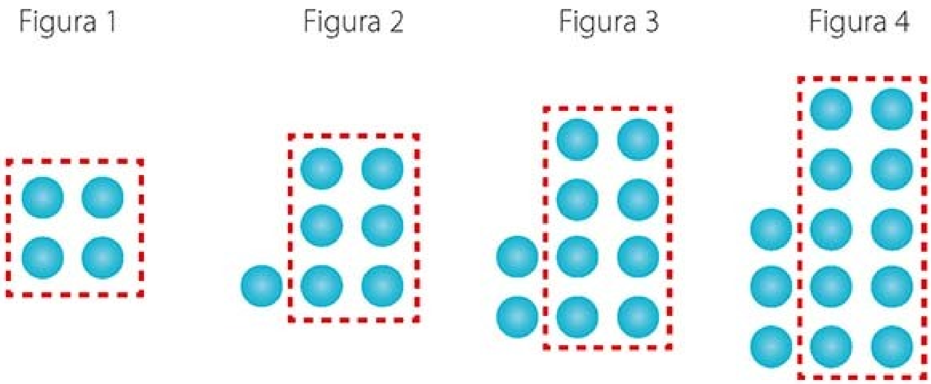
Reúnete con un compañero y realicen la siguiente actividad.

a) Justifiquen que la expresión $3(n-1)+4$ es adecuada para describir a la sucesión de puntos azules.
b) Usen la expresión del inciso anterior para determinar el número de puntos que hay en la figura que ocupa la posición 35.
c) Describan en palabras la formación de los términos de la sucesión.
d) ¿Notan alguna relación entre la descripción hecha en el inciso anterior y la expresión algebraica $3(n-1)+4$? Expliquen cuál es dicha relación.

Argumenten la validez de sus respuestas frente a otras parejas.

Equivalencia de expresiones algebraicas de primer grado formuladas a partir de sucesiones de figuras

Existe otra manera de contar el número de piezas que forma cada figura en la sucesión de puntos azules. Si consideras la siguiente imagen en la que se ha agrupado cierto número de piezas en cada figura, puedes notar que se da origen a dos sucesiones.



Reúnanse por equipos, eligiendo entre los números 1 y 2 para distribuir las siguientes actividades.

***a*)** Los equipos número 1 encuentren la expresión algebraica que se forma considerando la sucesión de puntos azules que se agrupan dentro de los recuadros punteados con rojo.

***b*)** Los equipos número 2 encuentren la expresión algebraica que corresponde a la sucesión de puntos que quedan fuera de los recuadros rojos.

***c*)** Justifiquen que el total de piezas de cada figura es la suma de las dos expresiones que obtuvieron en los incisos ***a*)** y ***b*)**.

***d*)** Argumenten por qué se debería cumplir la siguiente igualdad:

$$3(n-1)+4=2(n-1)+4+(n-1)$$

***e*)** Los equipos número 1 comprueben que la expresión $3n+1$ genera todos los términos de la sucesión de puntos azules. Los número 2 justifiquen su validez, así como su semejanza con la obtenida en el inciso ***c*)**.

Reúnanse en plenaria, presenten las diferentes expresiones algebraicas que encontraron y traten de determinar una en común.

Considera las siguientes descripciones.

- El primer término de una sucesión es cuatro y los sucesivos términos se obtienen sumando cuatro al anterior.
- Son los múltiplos de 4, excluyendo al cero.
- Es el número de la figura multiplicado por 4.

a) Enlista los primeros diez términos de la sucesión que determina la primera descripción.

b) Si n representa la posición de un término, ¿cuál es la expresión algebraica que traduce la primera descripción de los términos de la sucesión?

c) ¿Cuál es la expresión algebraica que detalla a los términos de la segunda descripción?, ¿por qué se excluye al cero?

d) ¿Cuál es la expresión algebraica que representa la tercera descripción?

Una vez que determinaste las expresiones algebraicas que corresponden a cada sucesión descrita en palabras, a partir de propiedades matemáticas trata de descubrir el parecido entre las tres. Toma nota de lo que observes y compáralo con lo que realizarás a continuación.

a) Usa la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la resta y la reducción de términos algebraicos semejantes para simplificar la expresión:

$$4(n-1)+4$$

b) Escribe las semejanzas y diferencias entre las expresiones:

$4n$ $\qquad$ $n \times 4$

c) A partir de los incisos ***a)*** y ***b)*** y la propiedad conmutativa de la multiplicación, justifica la siguiente equivalencia de expresiones algebraicas:

$$4(n-1)+4=4n$$

Compara los procedimientos que efectuaste con los que realizó un compañero y aporten ideas sobre el hecho de que se puede usar cualquier literal para representar una variable.

En concreto

La *equivalencia de expresiones algebraicas* hace referencia a que aun cuando dos expresiones estén escritas de forma diferente, en realidad representan lo mismo, la misma cantidad, número o medida.

La expresión algebraica que representa a una sucesión no es única. De acuerdo con la forma en la que se describa o presente la sucesión resultarán diversas expresiones algebraicas por lo que es necesario comprobar su equivalencia.

La *propiedad distributiva* establece que el resultado de un número multiplicado por la suma (o resta) de dos o más números es igual a la suma de los productos de cada sumando (o minuendo y sustraendo) por ese número. En términos algebraicos:

$$a(b+c)=ab+ac$$
$$a(b-c)=ab-ac$$

La *propiedad conmutativa* establece que al cambiar el orden de los elementos en una suma o multiplicación, su resultado no varía. En términos algebraicos:

$$a+b=b+a$$
$$ab=ba$$

La *reducción de términos semejantes* es un procedimiento que permite convertir o simplificar en un solo término dos o más términos semejantes.

Analicen la siguiente sucesión de figuras, luego realicen lo que se solicita. Registren sus ideas y cálculos, de manera ordenada, en sus cuadernos.

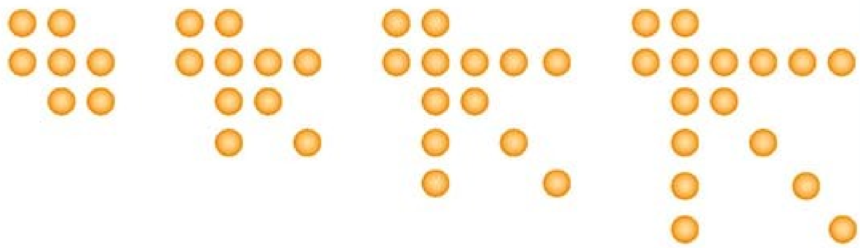
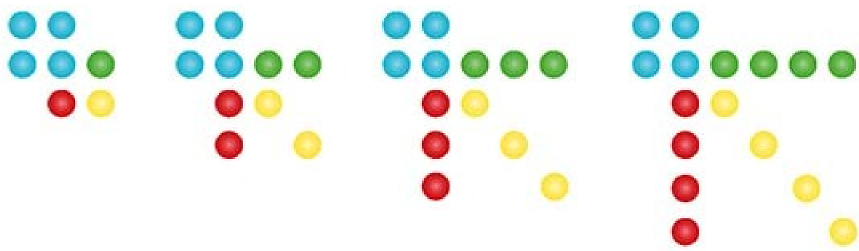


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

a) Dibujen tres términos que continúen con la sucesión descrita por las figuras.
b) Verifiquen que la sucesión formada por el número de puntos anaranjados de cada figura forma una sucesión aritmética.
c) Verifiquen que el número de puntos en cada figura es $4 + 3n$, donde n es la posición de la figura en la sucesión.
d) Consideren la agrupación de puntos, por colores, de la sucesión anterior que se muestra en la siguiente ilustración. Encuentren diferentes expresiones algebraicas, al menos dos diferentes, que representen la sucesión.



e) Verifiquen que todas las expresiones propuestas en el inciso anterior son equivalentes.

Compartan sus respuestas de forma grupal y justifiquen que todas las expresiones algebraicas formuladas son equivalentes.

Transversalidad

En la asignatura de Artes se utilizan patrones de figuras, y es usual que algunos diseños se vayan construyendo con base en la repetición o modificación secuencial de un elemento inicial.

Consulta con el profesor de la asignatura cuál corriente artística utiliza este principio para generar obras de arte e inventa una propia con ese estilo.

Equivalencia de expresiones algebraicas formuladas a partir de sucesiones numéricas

Considera las siguientes expresiones algebraicas:

$3(n-1)+2$ $\qquad$ $3n-1$

Dichas expresiones dan lugar a sucesiones numéricas cuyos términos pueden conocerse si se considera que n representa el número de la posición que ocupa cierto término en la sucesión. Realiza lo que se solicita en cada caso.

a) Puedes conocer el primer término de la sucesión $3(n-1)+2$ al sustituir $n=1$ (primera posición), para ello completa los siguientes cálculos escribiendo el elemento faltante en los recuadros.

$$3(\square-1)+2$$

$$3(\square)+2$$

$$\square+2$$

$$\square$$

b) ¿Cuál es el valor del segundo término de la sucesión? Completa los siguientes cálculos escribiendo el valor faltante en los recuadros.

$$3(\square-1)+2$$

$$3(\square)+2$$

$$\square+2$$

$$\square$$

c) Completa la siguiente tabla:

Posición	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Término										

d) Determina los primeros diez primeros términos de la sucesión $3n-1$.

e) ¿Los resultados de los incisos **c)** y ***d)*** permiten afirmar que las sucesiones $3(n-1)+2$ y $3(n-1)$ son equivalentes? Justifica tu respuesta.

f) Sin comparar término por término las sucesiones, ¿cómo justificarías que las expresiones $3(n-1)+2$ y $3n-1$ son equivalentes?

g) Con base en la respuesta del inciso anterior, justifica la equivalencia entre las expresiones algebraicas de las sucesiones:

$3n - 1$ $\quad$ $2n + (n - 1)$

h) Encuentra otra expresión algebraica que sea equivalente a las de las sucesiones descritas por las expresiones:

$3(n - 1) + 2$ $\quad$ $3n - 1$

Comparte tus resultados con el grupo, comenten cuál les parece la más simple de todas las expresiones algebraicas equivalentes que propusieron y establezcan un criterio para encontrar dicha expresión simplificada.

Con base en la actividad anterior, existe un criterio para saber cuándo dos expresiones algebraicas no son equivalentes. Para entenderlo, recuerda que una expresión algebraica se puede pensar como un tipo de regla con el que puedes operar ciertos números. Así, cuando sustituyes valores numéricos para las literales, como en el caso de las ecuaciones lineales al reemplazar la incógnita "x" o cuando sustituyes "n" por la posición que ocupa un término en una sucesión, los valores obtenidos pueden ser iguales o diferentes, pero en este último caso las expresiones algebraicas no podrían ser equivalentes porque no representarían la misma cantidad. Así, si se quiere determinar que las expresiones $2n + 1$ y $2(n + 1)$ no son equivalentes, bastaría encontrar un valor de n tal que al sustituir en ambas expresiones difieran los resultados.

Realiza lo que se solicita en cada caso.

a) Encuentra dos valores de n para los cuales las expresiones $2n + 1$ y $2(n + 1)$ difieren.

b) Usa el concepto de **paridad** para justificar que las expresiones $2n + 1$ y $2(n + 1)$ no pueden ser equivalentes.

c) Justifica la afirmación hecha en la última oración del párrafo anterior sobre el hecho de que dos expresiones algebraicas no pueden ser equivalentes si es posible encontrar un valor numérico en el cual difieran.

d) Utiliza el argumento del inciso anterior para verificar que las expresiones algebraicas $3n + 1$ y $3(n + 1)$ no son equivalentes.

e) Proporciona dos ejemplos de sucesiones numéricas tales que las expresiones algebraicas que las representan no son equivalentes. Justifica tus elecciones.

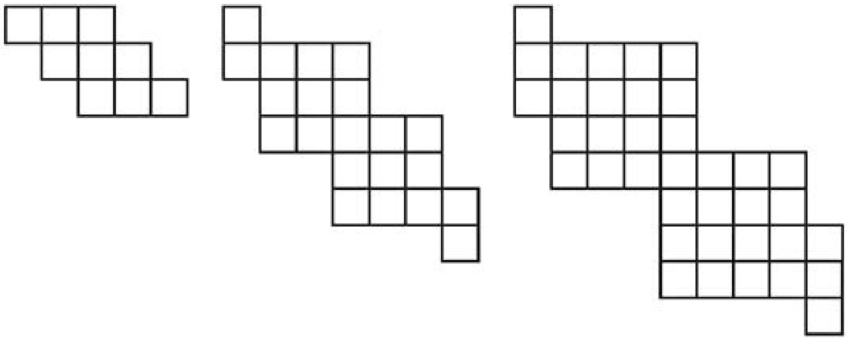
Comparte tus respuestas con un compañero y validen los argumentos que las sustentan.

Glosario

paridad. Atributo de ser par o impar.

¿Es de primer grado?

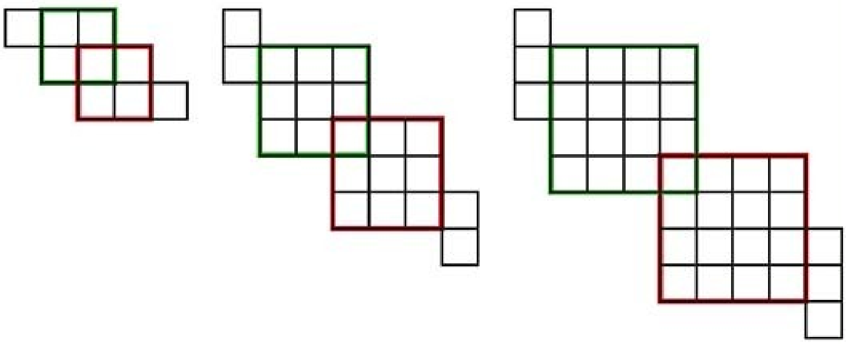
Considera la siguiente sucesión de figuras formadas por cuadraditos cuyos lados tienen longitud de una unidad.



Algunas preguntas de interés sobre la sucesión de figuras de la ilustración anterior son: ¿cuántos cuadrados se requieren para construir la figura 10? y ¿para la figura n? A diferencia de las sucesiones de figuras anteriores con las que se han ejemplificado los conceptos, parece que no es claro cómo es posible contar el número de cuadrados.

a) Traza dos figuras más que se encuentren en la sucesión de figuras descrita por la ilustración anterior y, con base en ellas, intenta deducir la regla de formación de los siguientes términos.

b) Observa que cada una las figuras tiene dos cuadrados grandes, uno verde y otro rojo, que se encuentran **superpuestos** y que sólo comparten un cuadradito. Lo puedes apreciar en la siguiente ilustración.



Si n indica la posición de la figura en la sucesión, justifica que la longitud de los lados de los cuadrados verdes, que es igual a la de los cuadrados rojos, es $n + 1$ (recuerda que los cuadraditos tienen lados que miden una unidad).

Glosario

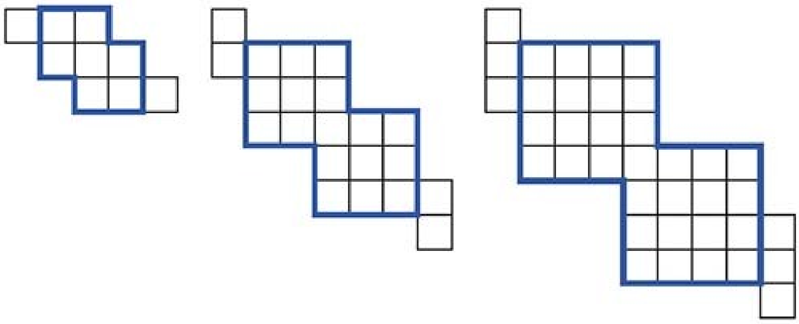
Superponer. Colocar una cosa encima de otra.

c) Justifica que el número de cuadrados que forman un cuadrado verde (o rojo) en cada una de las figuras es $(n + 1)(n + 1)$.

d) A partir del inciso c), determina por qué el total de cuadraditos que está en la región que comprenden los cuadrados verde y rojo debe ser igual a:

$$(n + 1)(n + 1) + (n + 1)(n + 1) - 1$$

Utiliza la siguiente ilustración como guía.



e) Justifica por qué el número de cuadraditos que quedan fuera de la región azul mostrada en la ilustración anterior se puede representar con la sucesión de números pares $2n$, donde n representa la posición de la figura en la sucesión.

f) Establece y justifica la validez de la siguiente expresión algebraica que permite obtener el número total de cuadraditos que forma a cada figura de la sucesión.

$$2\,(n + 1)(n + 1) + 2n - 1$$

g) Simplifica la expresión anterior usando la propiedad distributiva y la reducción de términos semejantes. Compárala con anteriores expresiones e indica sus semejanzas y diferencias con respecto a ellas.

Compartan sus respuestas de forma grupal y establezcan la principal diferencia entre la expresión algebraica obtenida en esta sucesión y las obtenidas con anterioridad. Escriban una definición para el concepto de "expresiones algebraicas de primer grado" y, con base en ella, argumenten por qué la expresión $2\,(n + 1)(n + 1) + 2n - 1$ no es de primer grado.

Visión matemática

En la Secuencia didáctica 9. Deduce y usa las relaciones entre los ángulos de polígonos en la construcción de polígonos regulares, encontrarás otra expresión algebraica generada a partir de una sucesión que no es de primer grado. Por eso es importante que aprendas a distinguirlas.

En concreto

El *grado* de una expresión algebraica es el mayor exponente que aparece en alguna de sus variables.

Por ejemplo, la expresión $4n + 3$ es de primer grado pues el exponente de su única variable, n, es 1, que por convención no se escribe. En la expresión $5n^2 - 8n + 1$, la variable n aparece con exponente 2 y 1, así que la expresión es de segundo grado.

Enl@ce

Resuelve los ejercicios referentes a patrones numéricos disponibles a través del siguiente enlace https://es.khanacademy.org/math/eb-1-semestre-bachillerato/eb-aplicando-el-razonamiento-matematico-8/modal/e/math-patterns y escribe las expresiones de primer grado que originan las sucesiones numéricas siempre que sea posible.

πensa

Asegúrate de que el aprendizaje que lograste durante esta secuencia didáctica sea permanente, para ello realiza las siguientes actividades de forma individual.

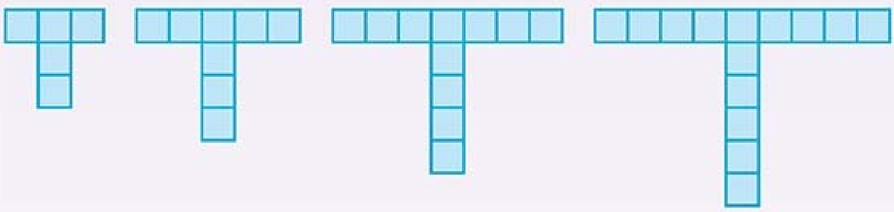
a) ¿Cuál es un procedimiento que se puede seguir para determinar la equivalencia de dos expresiones algebraicas de primer orden formuladas a partir de sucesiones? Explícalo a detalle.

b) Describe un método que te permita decidir cuando dos expresiones algebraicas formuladas a partir de sucesiones no son equivalentes y justifícalo.

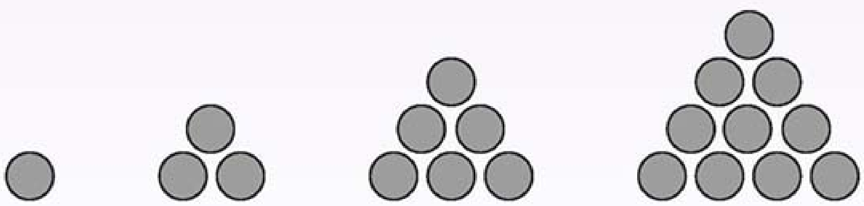
c) ¿Son equivalentes las siguientes expresiones algebraicas? Justifica tu respuesta.

$5 + 3(n - 1)$ $\quad$ $3n + 2$

d) Encuentra dos expresiones algebraicas de primer grado equivalentes que representan a la siguiente sucesión de figuras. Justifica la equivalencia de las expresiones.



e) Justifica que la expresión algebraica que representa a la siguiente sucesión de figuras no es de primer grado.



De forma grupal, después de revisar las respuestas de las actividades, tómense un momento para exponer todo lo que aprendieron durante esta secuencia, pero no olviden mencionar las dificultades que tuvieron y cómo las superaron.

Corrijo y aprendo

Si aún te cuesta trabajo asociar sucesiones de figuras con su respectiva expresión algebraica, considera dar un repaso a la secuencia didáctica y consultar libros o alguno de los recursos electrónicos que se propusieron.

Pruébate

Selecciona la respuesta correcta para cada pregunta.

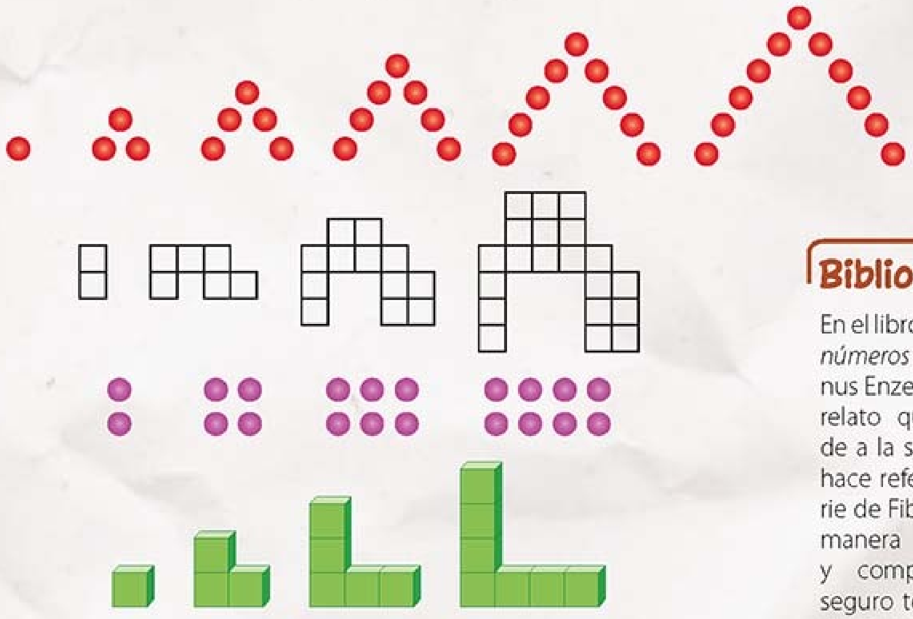
1. ¿Cuál es el primer término de la sucesión cuya expresión algebraica es $-2n - 3$?

   a) 5 *b*) -1 *c*) 1 *d*) -5

2. ¿Cuál de las siguientes expresiones algebraicas no es de primer grado?

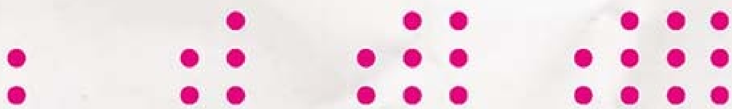
   a) $2 - n + 4n$ *b*) $2n - 1$ *c*) $-1 + 2n - n^2$ *d*) $4 - 2n$

3. Son dos sucesiones de figuras que dan origen a expresiones algebraicas equivalentes.



   a) La primera y la segunda *c*) La tercera y la cuarta
   b) La segunda y la tercera *d*) La primera y la cuarta

4. Es una expresión algebraica equivalente a la obtenida mediante la sucesión de figuras que se muestra a continuación.



   a) $2n^2 + n - 1$ *b*) $2n + (n - 1)$ *c*) $3(n - 1)$ *d*) $1 - 3n$

5. Es una expresión algebraica equivalente a la sucesión que consiste en todos los múltiplos de seis, excluyendo al cero y al seis.

   a) $6n + 1$ *b*) $6n + 2$ *c*) $6(n + 1)$ *d*) $6n - 6$

Biblioteca

En el libro *El diablo de los números* de Hans Magnus Enzensberger, en el relato que corresponde a la sexta noche, se hace referencia a la serie de Fibonacci de una manera muy divertida y comprensible que seguro te fomentará el gusto por la lectura.

Puedes pedir una sugerencia bibliográfica a tu profesor para conocer más sobre las sucesiones numéricas y de figuras.

Formula expresiones de primer grado para representar propiedades (perímetros y áreas) de figuras geométricas y verifica equivalencia de expresiones, tanto algebraica como geométricamente (análisis de las figuras)

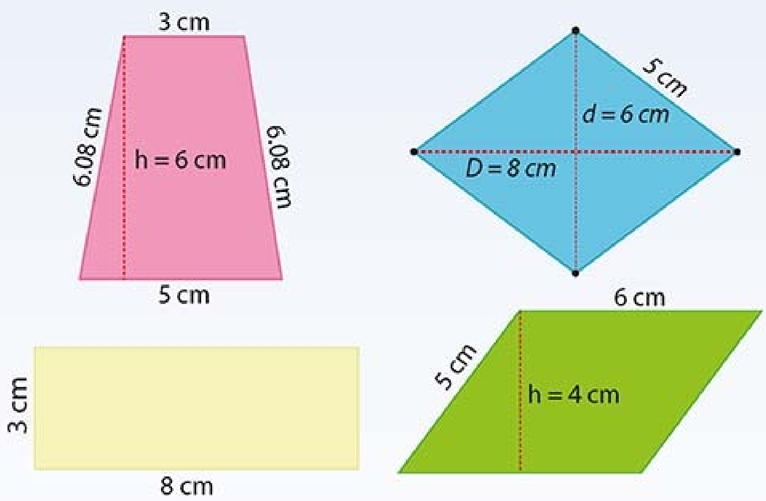
Empieza

Recuerda del curso anterior el contenido relacionado con perímetros y áreas de figuras geométricas, mientras resuelves en tu cuaderno las actividades de esta página. Compara tus respuestas con las de un compañero y si encuentran errores, coméntenlos y realicen las correcciones necesarias.

a) Dibuja tres polígonos cuyo perímetro sea de 10 unidades.

b) Si un triángulo equilátero tiene un perímetro de 9 cm, ¿cuánto debe medir cada uno de los lados iguales de un triángulo isósceles que tiene el mismo perímetro que el triángulo equilátero, si se sabe que su base es de 5 cm?

c) ¿Cuáles de los siguientes cuadriláteros tienen el mismo perímetro y la misma área?



d) Determina cuáles de los siguientes pares de medidas enteras corresponden a la base y altura, respectivamente, de un triángulo cuya área es 12 cm^2.

1 cm, 12 cm	6 cm, 6 cm
4 cm, 8 cm	3 cm, 4 cm
2 cm, 12 cm	4 cm, 6 cm

En concreto

Un ***polígono*** es una figura plana formada por una sucesión de segmentos distintos (no alineados) llamados ***lados*** del polígono. Los extremos de esos segmentos son llamados ***vértices*** del polígono, de tal manera que el extremo de un segmento es el extremo de otro.

Visión matemática

En ocasiones es complicado recordar con exactitud las fórmulas para realizar ciertos cálculos. ¿Cómo resolverías los problemas planteados en esta sección si no recordaras dichas fórmulas?

Avanza

Equivalencia entre expresiones algebraicas de primer grado que representan el perímetro de triángulos

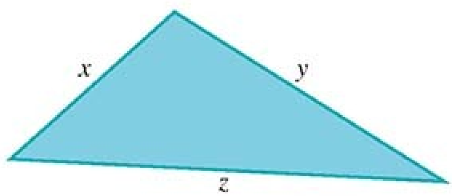
Parece que calcular el perímetro de un polígono resulta sencillo, sin embargo, este cálculo depende de la información que se tenga sobre las longitudes de los lados del polígono.

Considera el polígono más sencillo, el triángulo. Como ya sabes, los triángulos se clasifican en tres tipos de acuerdo con la longitud de sus lados. Completa en cada inciso las oraciones y las expresiones en los recuadros:

a) De acuerdo con la medida de sus lados hay tres tipos de triángulos: ____, ____, y ____. Para cada uno de ellos existe una expresión que indica cómo calcular su perímetro.

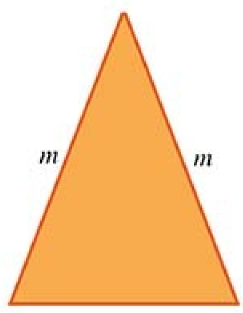
b) En el caso del triángulo ____ cuyas medidas de sus lados se han identificado con las letras x, y, z, el valor del perímetro P se obtiene al considerar la suma de las variables x, y, z. Es decir:

$$P = \boxed{}$$



c) Para un triángulo ____ cuyas longitudes de sus lados se etiquetan con las letras l, m, n, donde $l = m$, es decir l y m son los lados iguales, el perímetro se puede expresar, al menos, de dos maneras diferentes pero equivalentes:

$P = \boxed{}$ $\qquad$ $P = \boxed{}$



Visión matemática

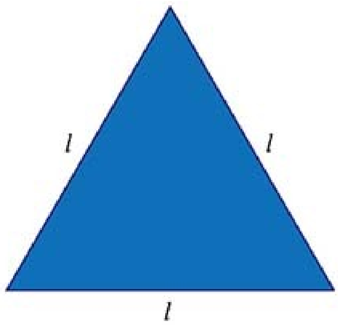
Realiza en tu cuaderno un mapa conceptual en el que establezcas la clasificación de los triángulos por la medida de sus lados y por la medida de sus ángulos.

***d*)** Para un triángulo ________ cuya longitud de sus lados son: a, b y c, donde $a = b = c$, el perímetro se puede expresar de varias formas, tres de ellas son:

$P =$ ________

$P =$ ________

$P =$ ________

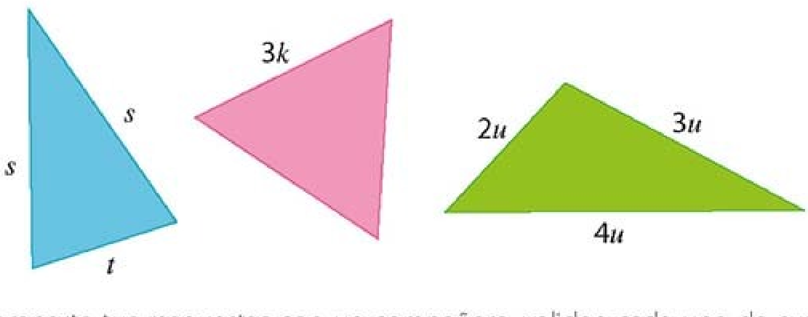


***e*)** Justifica que, salvo las literales usadas, la expresión algebraica que representa el perímetro de un triángulo escaleno es única y está en su forma simplificada.

***f*)** Justifica que las dos expresiones algebraicas que representan el perímetro de un triángulo isósceles son equivalentes.

***g*)** ¿Existe otra expresión algebraica distinta a las que escribiste que representa el perímetro de un triángulo equilátero? En caso afirmativo justifica que es equivalente y en caso negativo argumenta por qué no existe otra.

***h*)** Calcula el perímetro de los siguientes triángulos cuyas medidas se indican mediante literales.

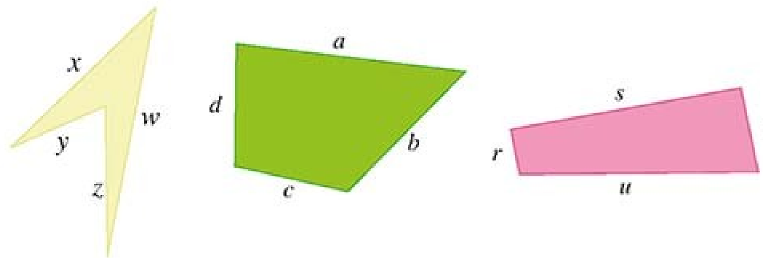


Comparte tus respuestas con un compañero, validen cada uno de sus argumentos y decidan cuáles son las expresiones más simples que caracterizan el perímetro de un triángulo escaleno, isósceles y equilátero, respectivamente.

Equivalencia de expresiones algebraicas de primer grado que representan el perímetro de cuadriláteros

Realicen las siguientes actividades.

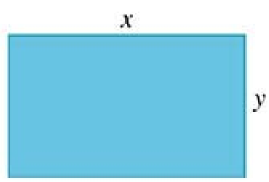
a) Al igual que con los triángulos, consideren los siguientes cuadriláteros que tienen todos sus lados diferentes. Si las longitudes de cada lado se representan con las letras que se indican, expresen el perímetro P de cada uno de ellos.



$P =$ ______ $P =$ ______ $P =$ ______

b) Justifiquen que, salvo las literales usadas, la expresión algebraica que representa el perímetro de un cuadrilátero de lados diferentes es única y está en su forma más simple.

c) Consideren que en un rectángulo, los lados opuestos son iguales.



De esta manera, su perímetro se puede expresar como:

$P =$ ______ o

$P =$ ______

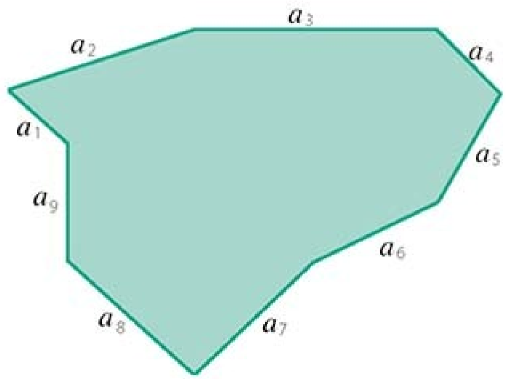
d) Justifiquen que las dos expresiones algebraicas que representan el perímetro de un rectángulo son equivalentes y escriban otra expresión algebraica equivalente a ambas.

e) ¿Cuál es la expresión algebraica simplificada para representar el perímetro de un cuadrado? Justifiquen su respuesta.

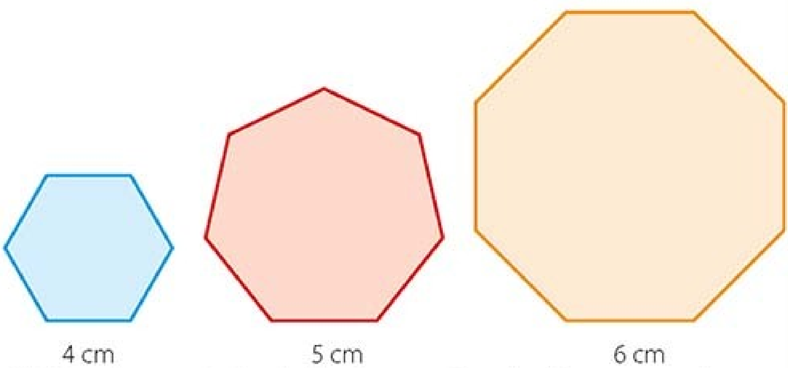
Compartan sus respuestas con otras parejas, validen cada uno de sus argumentos y decidan cuáles son las expresiones simplificadas que caracterizan el perímetro de un cuadrilátero de lados diferentes, un rectángulo y un cuadrado.

Equivalencia de expresiones algebraicas de primer grado que representan el perímetro de polígonos de cinco o más lados

Para encontrar una expresión algebraica que represente el perímetro de un polígono de nueve lados donde éstos se han etiquetado como en la siguiente figura, reúnanse por equipos y realicen lo que se solicita a continuación.



***a*)** Escriban la expresión algebraica que representa su perímetro.
***b*)** ¿Hay otra expresión algebraica que puede representar el perímetro del polígono irregular? Justifiquen su respuesta
***c*)** Si $a_3 = a_5 = a_9$, ¿cuál es la expresión algebraica que representa el perímetro del polígono bajo estas condiciones?
***d*)** Si todos los lados del polígono de nueve lados son iguales, es decir, $a_1 = a_2 = \cdots = a_8 = a_9$. ¿Cuáles expresiones podrían representar el perímetro del polígono bajo estas condiciones? Cada equipo debe proponer una expresión equivalente.
***e*)** Calculen el perímetro de los siguientes polígonos.



4 cm 5 cm 6 cm

***f*)** Usen los resultados del inciso anterior y justifiquen que si un polígono es regular, es decir, que todos sus lados son iguales, entonces una expresión algebraica que representa su perímetro es $P = nl$. ¿Qué representan n y l en la expresión?

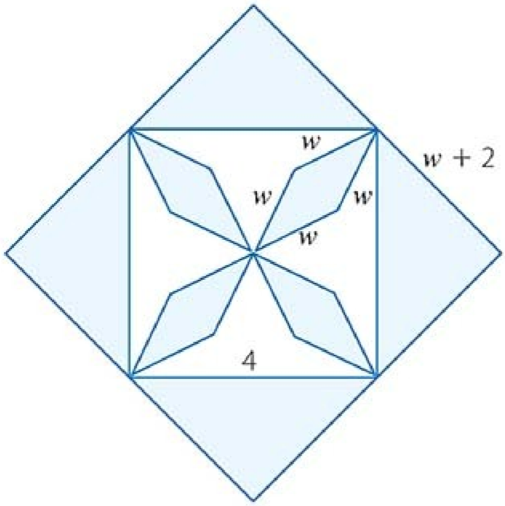
En plenaria, concluyan sobre la equivalencia de expresiones algebraicas que representan el perímetro de polígonos, y además expliquen por qué todas las expresiones propuestas hasta el momento son de primer grado.

Visión matemática

¿Cuál es el nombre adecuado de un polígono de nueve lados?

Reúnete con un compañero, analicen el siguiente enunciado y resuelvan lo que se solicita.

La siguiente figura representa la vista área de un edificio que piensa construirse en el centro de una ciudad. Las partes azules indican la región donde la construcción se levantará, mientras que las regiones blancas indican el lugar donde se colocarán áreas verdes.



Visión matemática

Si te dieran la expresión algebraica que representa el perímetro de una figura, ¿qué otro dato necesitarías para determinar de qué figura se trata?

Analiza si existen casos en los que no se puede determinar y establece por qué.

El encargado del proyecto debe resolver algunos problemas sobre esta construcción. A continuación se indica cuáles son, respondan cada uno de ellos.

a) Proporcionen la expresión algebraica del perímetro exterior de la construcción, pues es necesaria para calcular el costo de la pintura roja con la que se pintará una línea para delimitarlo.

b) Los jardines interiores deben estar rodeados por cercos de arbustos, por lo que es necesario dar una expresión que indique el perímetro que debe cubrirse. Escriban tal expresión.

c) Si el lado del triángulo exterior que mide $w + 2$ se ajusta a $3w$, ¿cuál sería la expresión para lo planteado en el inciso ***a)***?

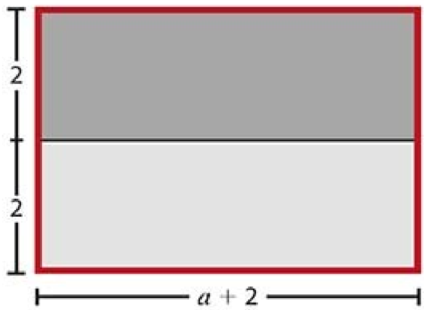
d) Tomen en cuenta la expresión del inciso anterior y consideren que el costo de pintar una línea en el perímetro exterior es \$50 por metro. Si $w = 22.5$ metros, ¿cuál es el costo total de pintar la línea roja?

e) Cada metro de largo del cerco de arbustos que se quiere colocar en los jardines interiores tiene un costo de \$350.90. ¿Cuál sería el costo de plantar los arbustos si $w = 45$ metros?

Comparen sus respuestas con otras parejas y, si éstas difieren, verifiquen si las expresiones algebraicas son equivalentes, así como los cálculos realizados.

Expresiones de primer grado para representar el área de figuras geométricas y su equivalencia mediante propiedades algebraicas

Consideren el siguiente rectángulo:



a) ¿Cuáles son las medidas del rectángulo de contorno rojo? Escríbanlas a continuación:

Base =

Altura =

b) Con los datos del inciso anterior, ¿cuál es el área del rectángulo de contorno rojo? Escríbanla a continuación:

Área =

c) Ahora observen el rectángulo de color gris claro, ¿cuáles son sus medidas?, ¿cuál es su área?

d) Determina las medidas del rectángulo de color gris oscuro y su área.

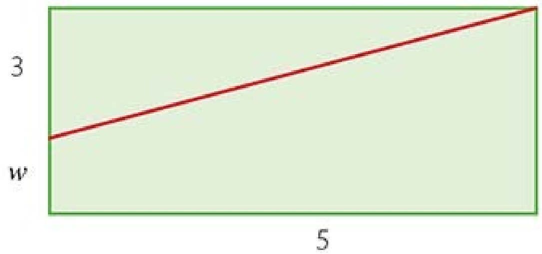
e) ¿Por qué el área de las dos regiones grises debe ser igual al área del rectángulo de contorno rojo?

f) Traduzcan al lenguaje algebraico el hecho geométrico observado en el inciso anterior y determinen cuáles son las expresiones algebraicas que resultan equivalentes.

g) Determinen el grado de las expresiones algebraicas que aparecen en esta actividad.

Dibujen un rectángulo con otras medidas y pidan a otra pareja que determine las expresiones algebraicas que resultan equivalentes. La otra pareja les pondrá un ejercicio similar. Deben verificar que las expresiones resultantes son de primer grado.

Ahora consideren la siguiente figura en la que el propósito no es calcular el área total sino sólo una parte de ella.



a) Reproduzcan la figura en su cuaderno y remarquen con un color el cuadrilátero cuyos lados son la línea roja y los de longitud w, 5 y $3 + w$.

b) ¿Es posible calcular el área del cuadrilátero que indicaron en el punto anterior usando una expresión algebraica? En caso afirmativo, indiquen cuál es y justifiquen su validez; de lo contrario, continúen realizando la actividad.

c) ¿Cuál es la expresión algebraica que representa el área de todo el rectángulo?

d) ¿Cuál es la expresión algebraica que representa el área del triángulo, uno de cuyos lados es la línea roja?

e) ¿Cómo pueden justificar que el área del cuadrilátero es igual a la diferencia de áreas entre el rectángulo y el triángulo?

f) Escriban la expresión algebraica simplificada que representa el área del cuadrilátero.

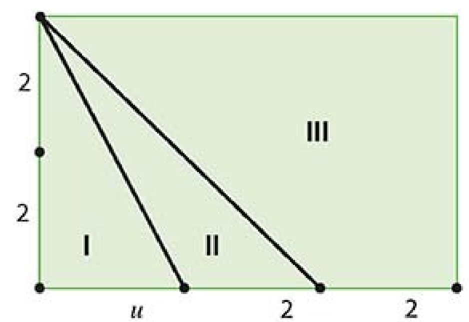
g) Calculen el área del cuadrilátero cuando $w = 0$. ¿Tiene sentido este resultado cuando lo comparan con la respuesta del inciso anterior? Expliquen.

En plenaria traten de aclarar las dudas que hayan surgido durante el desarrollo de la actividad.

Visión matemática

Si es necesario, pueden reproducir la figura en papel reciclado y manipularla. Mientras más sentidos se activen al aprender, mejor será la asimilación y retención de la información.

A partir de la siguiente figura determina dos expresiones algebraicas que sean equivalentes. Nota que la figura se puede dividir en tres regiones I, II y III.



Realiza lo que se solicita en cada caso.

a) Usa el conocimiento que adquiriste en la secuencia didáctica 3 sobre potencias y verifica que las expresiones algebraicas $l \times l$ y l^2 son equivalentes. ¿Qué concepto geométrico puedes calcular con dichas expresiones?

b) Recuerda lo que aprendiste en la secuencia didáctica 5 sobre el grado de un término algebraico, ¿cuál es el grado del término $l \times l$?, ¿y el de l^2?

c) Escribe una expresión algebraica que te permita calcular el área de un rectángulo de base b y altura h, determina una expresión equivalente a ella e indica su grado.

d) De entre las siguientes fórmulas encierra en un círculo a aquéllas que permiten calcular el área de cuadriláteros, debajo dibuja la figura que le corresponde señalando a qué hace referencia cada una de las variables que aparecen en la expresión.

$\frac{bh}{2}$	$\frac{Dd}{2}$	$\frac{(B+b)h}{2}$

e) Con base en el inciso anterior, ¿por qué consideras que la expresión algebraica que permite calcular el área de un cuadrilátero es de segundo grado? Justifica tu respuesta.

f) ¿Una expresión algebraica de primer grado puede representar el área de una figura geométrica? Justifica tu respuesta.

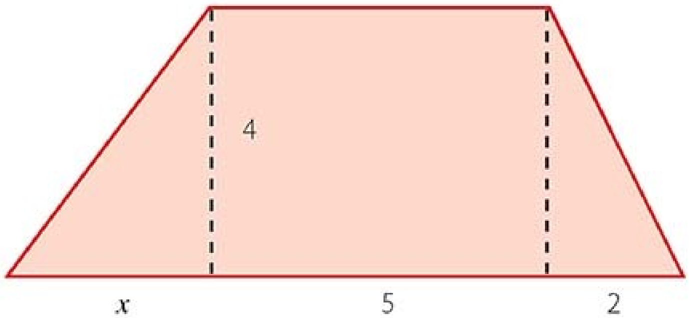
Compara tus respuestas con un compañero y planteen ideas sobre las características que debe tener una figura geométrica para que la expresión algebraica que representa su área sea de primer grado.

Enl@ce

Utiliza la actividad interactiva realizada con el *software* GeoGebra disponible en el siguiente enlace https://www.geogebra.org/m/d3M2dUNm#material/bZgEu2Xd y observa cómo se puede deducir la fórmula para calcular el área de un paralelogramo, triángulo, trapecio y rombo a partir de conocer el área del rectángulo.

Equivalencia de expresiones algebraicas mediante el análisis de figuras

Consideren la siguiente figura geométrica:



a) Justifiquen que el área de todo el trapecio resulta igual a la suma de las áreas de dos triángulos y la de un rectángulo.

b) Reproduzcan la figura en una hoja de papel reciclado, recórtenla siguiendo las divisiones indicadas y formen diferentes combinaciones con las piezas.

c) Con base en lo hecho en el inciso anterior, escriban de dos maneras equivalentes el área del trapecio y argumenten la validez de cada una de ellas.

d) Justifiquen que las expresiones que propusieron son equivalentes mediante el uso de los siguientes procedimientos algebraicos:

- Si la expresión algebraica utiliza paréntesis usen la propiedad distributiva para eliminarlos.
- Si hay términos semejantes deben reducirlos.
- Si hay multiplicaciones o sumas de números enteros, fracciones o decimales realicen las operaciones correspondientes.

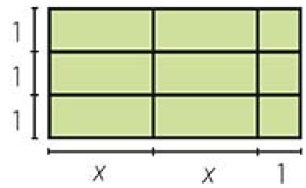
e) ¿A cuál configuración geométrica corresponde la expresión $\frac{4(x+2)}{2} + 20$? Justifiquen la equivalencia de esta expresión con las que obtuvieron en el inciso ***c***).

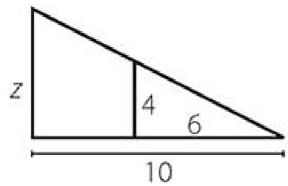
Comparen sus respuestas con otras parejas y recuerden que es importante comparar los diferentes procedimientos que siguieron, así como argumentar los razonamientos en los que basaron cada paso dado.

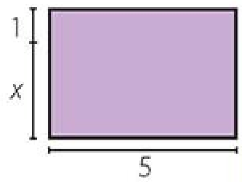
Visión matemática

Hay otras propiedades de las operaciones que se usan para probar la equivalencia de expresiones algebraicas, pero muchas veces se hace uso de ellas sin justificarlo.

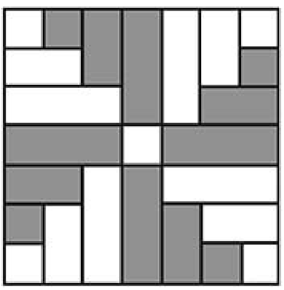
Formen tres equipos, mediante un sorteo o por indicación del profesor. Cada equipo analizará una de las figuras que se encuentran debajo y determinará diversas expresiones algebraicas, al menos tres diferentes, que representen su área. La revisión de la actividad la llevará a cabo otro equipo al comprobar algebraicamente la equivalencia entre dos de las expresiones que el equipo evaluado le indique. Si el equipo evaluador detectara un fallo en la formulación de las expresiones algebraicas propuestas, ganará un punto o, en caso contrario, al no poder comprobar la equivalencia, perderá un punto. El equipo ganador será aquél que acumule más puntos. En caso de empate, el profesor propondrá un problema similar y ganará el primer equipo que pueda representar correctamente el área de la figura de dos maneras diferentes.







En la siguiente figura el cuadrado central tiene un área numéricamente igual a C.



a) Indica una expresión algebraica que represente el área sombreada dentro del cuadrado de mayor tamaño.

b) Escribe una expresión algebraica para el área blanca dentro del cuadrado de mayor tamaño.

c) Formula una expresión algebraica para el área del cuadrado de mayor tamaño.

d) Determina el valor numérico del área de la región sombreada, la blanca, y la del cuadrado de mayor tamaño sabiendo que $C = 0.75$.

e) Utiliza lo que sabes sobre la raíz cuadrada para determinar cuál debería ser la longitud del cuadrado central para que el área de la región sombreada sea 10 unidades cuadradas.

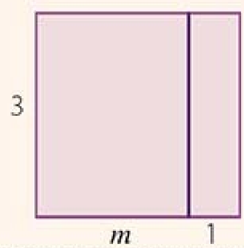
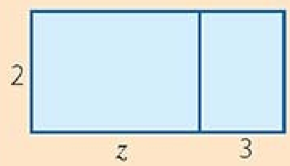
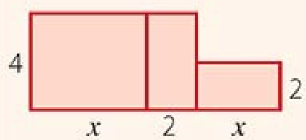
Piensa

Integra y fortalece lo que aprendiste durante esta secuencia, para ello realiza las siguientes actividades en tu cuaderno.

a) ¿Todas las expresiones algebraicas se pueden representar geométricamente? Justifica tu respuesta.
b) Describe un procedimiento geométrico que puedes usar para determinar la equivalencia de dos expresiones algebraicas.
c) Utiliza una figura o arreglo de figuras para representar la siguiente expresión algebraica:

$$6h + 6$$

d) Para cada representación geométrica determina una expresión algebraica del perímetro y del área.

Representación geométrica	Expresión algebraica del perímetro	Expresión algebraica del área
		
		
		

De forma grupal, revisen y validen las respuestas a las actividades. Es momento de plantear las dudas y dificultades más frecuentes que surgieron durante el desarrollo de las actividades de la secuencia para que juntos busquen la mejor manera de resolverlas.

Pruébate

Selecciona la respuesta correcta para cada cuestión.

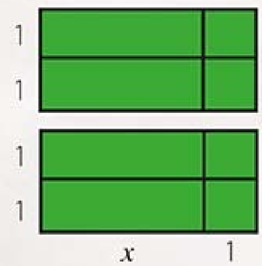
1. ¿Cuál de los siguientes perímetros es imposible de representar mediante la expresión $3q + 2p$?

   a) El de un triángulo isósceles, cuyos lados iguales miden p y el lado desigual mide $3q$
   b) El de un pentágono irregular, tres de cuyos lados miden q y los otros dos miden p
   c) El de un rectángulo, cuya base mide $1.5q$ y cuya altura mide p
   d) El de un rombo, cuya diagonal menor mide p y cuya diagonal mayor mide $3q$

2. ¿Cuál de las siguientes expresiones algebraicas representa la mitad del área del siguiente triángulo equilátero si su altura mide $\frac{5}{6}$?

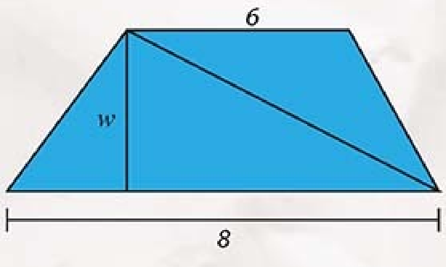
   a) $12z$
   b) $6z$
   c) $0.5z$
   d) $0.25z$

3. ¿Qué expresión es equivalente al área del siguiente arreglo geométrico?



   a) $4x$
   b) $2(x + 1)$
   c) $2(x + 1) + x + 1$
   d) $4(x + 1)$

4. ¿Cuál expresión algebraica representa el área de la siguiente figura?



   a) $7w$
   b) $10w$
   c) $24w$
   d) $40w$

Corrijo y aprendo

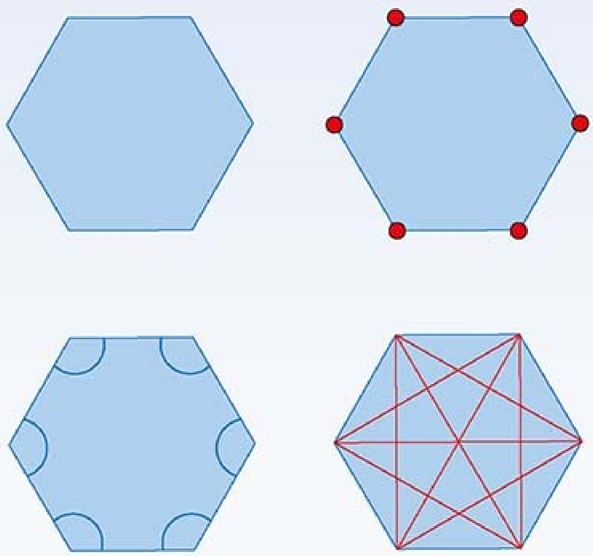
Identifica tus aciertos así como tus fallos. Si es el caso, repasa el material correspondiente en esta secuencia.

Deduce y usa las relaciones entre los ángulos de polígonos en la construcción de polígonos regulares

Empieza

Al resolver las siguientes actividades recupera los conocimientos adquiridos acerca de diversas características de los polígonos. Comenta tus respuestas con un compañero y observa si coinciden con las tuyas, si no es el caso repasen los conceptos que aquí se mencionan y validen las respuestas correctas.

a) Nombra dos cuadriláteros en cuya construcción se requiera considerar ángulos rectos.
b) ¿Cuánto miden los ángulos interiores de un triángulo equilátero?
c) ¿En cuál de las siguientes ilustraciones se destacan los ángulos interiores del polígono? Enciérrala.



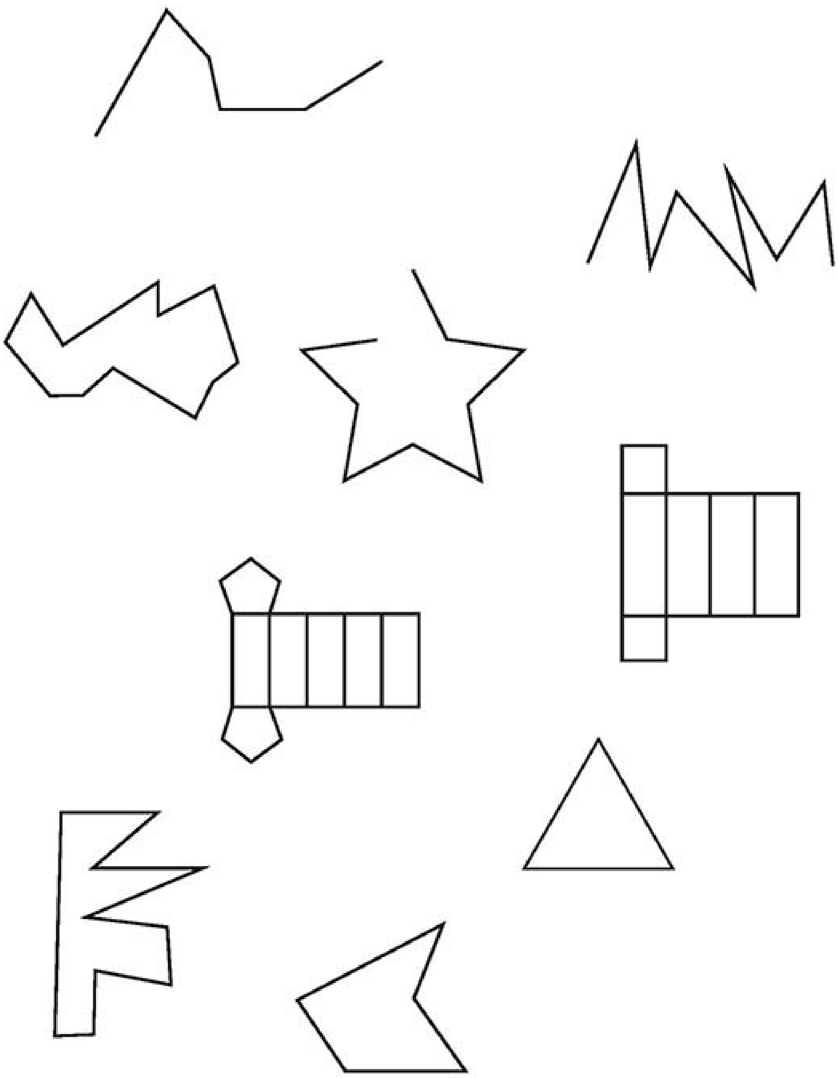
d) ¿Cuál de las siguientes descripciones define con mayor precisión a un ángulo? Subraya la única opción correcta.

- Es la esquina de una figura geométrica.
- Es la unión de dos líneas rectas.
- Es la abertura que se forma cuando dos líneas rectas parten de un punto en común.
- Es la figura geométrica formada por el cruce de dos líneas rectas.
- Es el vértice del que parten dos rectas que lo tienen como punto en común.

Avanza

Polígonos

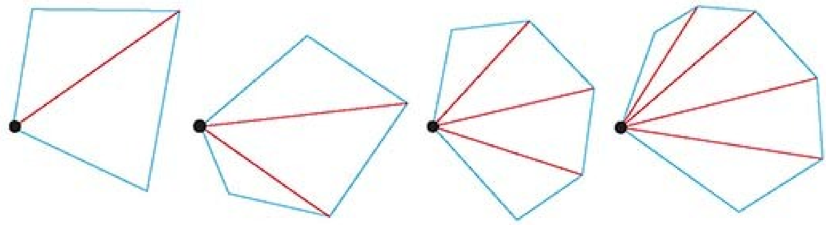
En plenaria, determinen cuáles de las siguientes figuras geométricas son polígonos. Cada equipo puede aportar un criterio para determinar si una figura es o no un polígono.



Una vez que de común acuerdo definan los criterios para validar qué figuras geométricas sí son polígonos, realicen un mapa conceptual en el que muestren la clasificación de los polígonos de acuerdo con la medida de sus lados y respecto a la medida de sus ángulos. Es preciso identificar cuáles son las principales confusiones en la definición y clasificación de polígonos, pues se utilizarán durante todo este tema.

Diagonales

X Considera la siguiente sucesión de figuras:



Analiza cómo está construida y realiza las siguientes actividades.

***a*)** Dibuja en tu cuaderno los tres elementos siguientes que continúan la sucesión de figuras.

***b*)** Llena la siguiente tabla, a partir de la sucesión de figuras. Guíate por el ejemplo.

Número de lados	Número de líneas rojas
4	1

***c*)** Considera la sucesión de números que indica el número de líneas rojas que se forman en cada figura. Explica por qué esta sucesión es aritmética.

***d*)** Formula una expresión algebraica para representar la sucesión del número de líneas rojas de cada figura a partir del número de lados.

***e*)** Verifica si la expresión algebraica que obtuviste en el inciso anterior coincide con la siguiente:

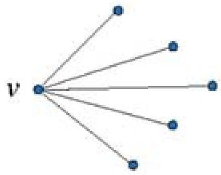
$$D_v = n - 3$$

Donde D_v representa el número de diagonales de un polígono desde un vértice, y n el número de lados del polígono. Si no coincide, recuerda verificar si son equivalentes.

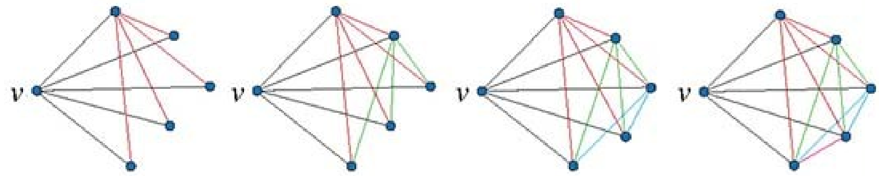
Reflexiona sobre si la expresión algebraica del inciso ***e*)** está simplificada; comparte tus ideas con un compañero.

Realicen lo que se pide en cada caso.

a) Describan las características de la siguiente figura.



b) Observen la siguiente sucesión de imágenes, la cual da continuidad a la figura anterior y determinen qué se realiza en cada una.



c) Completen la siguiente tabla.

6 puntos iniciales						
	Color de los segmentos	Negro	Rojo	Verde	Azul	Rosa
	Número de segmentos	5				

d) Cada integrante debe repetir el proceso descrito en los incisos anteriores, pero puede elegir 7, 8, 9, 10 o más puntos iniciales.

e) Justifiquen que si inician con n puntos, después de un proceso similar al descrito por la sucesión del inciso ***b)***, se traza un polígono de n lados y todas sus diagonales.

f) Con base en el inciso anterior expliquen y justifiquen por qué la suma $1 + 2 + 3 + ... + (n-1)$ permite calcular el número total de líneas trazadas, las cuales incluyen al polígono (lados) y sus diagonales.

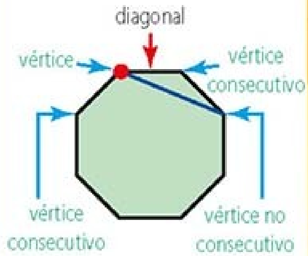
g) Realicen el cálculo de la suma $1 + 2 + 2 + ... + (n-1)$ para algunos valores de n. Conjeturen, mediante una expresión algebraica, cuál es el número total de diagonales de un polígono.

h) Verifiquen, mediante la sustitución de valores para n, que la expresión $D_T = \frac{n(n-3)}{2}$ permite obtener el número total de diagonales de un polígono, donde D_T es el número total de diagonales y n es el número de lados del polígono. Comparen su verificación con las conjeturas del inciso anterior, y corroboren si son equivalentes.

Discutan en plenaria por qué la expresión $D_T = \frac{n(n-3)}{2}$ no es de primer grado.

En concreto

Las diagonales de un polígono son los segmentos de recta que unen dos vértices de un polígono que no forman parte de un mismo lado, es decir, una diagonal une vértices no consecutivos. Observa la siguiente imagen:



Visión matemática

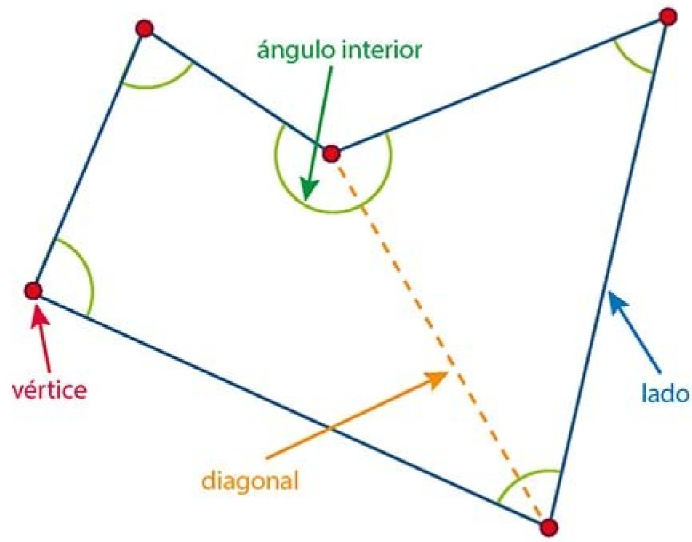
Observa la secuencia de figuras y responde, ¿si aumentan los puntos iniciales también aumenta el número de colores a utilizar?

Ángulos interiores

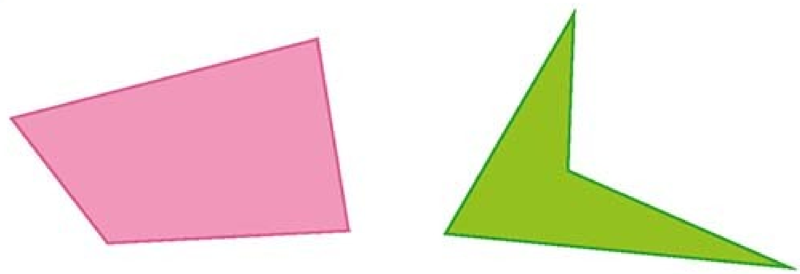
En la siguiente imagen se ilustran algunos de los elementos de un polígono que hasta ahora puedes reconocer sin mayor dificultad.

En concreto

El *ángulo interior* de un polígono es aquél que se forma dentro del polígono por dos lados consecutivos.



Necesitas un transportador. Responde lo que se solicita en cada caso.



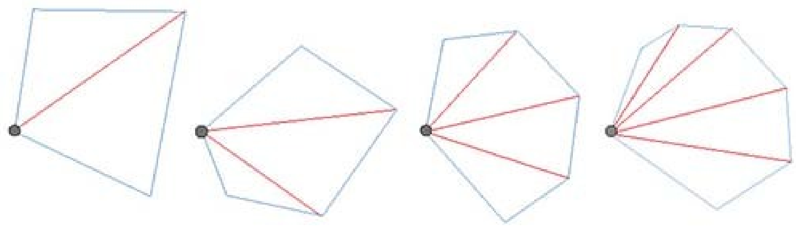
En concreto

Recuerda que el polígono más simple es el triángulo y que en ese caso la suma de los ángulos interiores es igual a ciento ochenta grados (180°).

a) ¿Qué tipo de polígonos son?
b) Establece dos diferencias entre ambas formas.
c) Usa un transportador, mide los ángulos interiores de las figuras y determina el valor de la suma de dichos ángulos.
d) ¿A partir del inciso anterior es posible afirmar cuál es la suma de los ángulos interiores de cualquier cuadrilátero? ¿Por qué?
e) Dibuja otros cuadriláteros y profundiza en la respuesta que proporcionaste en el inciso anterior.

Comparte tus respuestas con un compañero y establezcan un método para determinar la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero.

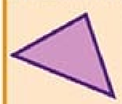
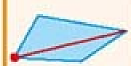
Analicen la siguiente sucesión de figuras y realicen lo que se solicita en cada caso.



a) Si n representa el número de lados del polígono, escriban una expresión algebraica que determine el número de triángulos que se forman al trazar todas las diagonales desde un mismo vértice.

b) Usando la expresión algebraica que encontraron en el inciso anterior, justifiquen que la suma de todos los ángulos interiores de un polígono es un **múltiplo** de 180°.

c) Copien en su cuaderno la siguiente tabla. Deben añadir al menos cinco filas más; cada integrante añadirá una fila. Observen las regularidades en su formación.

Polígono	Número de lados	Número de diagonales desde un vértice	Número de triángulos que se forman en su interior	Suma de los ángulos interiores
	3	0	1	180°
	4	1	2	360° = 2(180°)

d) ¿Tiene sentido la información en el renglón correspondiente a un triángulo en la tabla anterior? Justifiquen su respuesta.

e) Para corroborar los resultados de los incisos ***b***) y ***c***), determinen la suma de los ángulos interiores de los siguientes polígonos: octágono, dodecágono y un polígono de 24 lados.

f) Supongan que el polígono es regular, ¿cómo justifican que sus ángulos interiores tienen exactamente la misma medida?, ¿cuál es su medida?

g) Para corroborar lo hecho en el inciso ***f***), determinen cuál es la medida de los ángulos interiores de los siguientes polígonos regulares: hexágono, octágono, decágono y un polígono de 32 lados. Cada integrante del equipo puede realizar uno de los cálculos solicitados.

En plenaria, discutan los resultados de las actividades y debatan para aclarar los procedimientos.

Glosario

múltiplo. Es un número que contiene un número exacto de veces a otro.

En concreto

En el caso de los cuadriláteros, es fácil ver que si se considera la diagonal desde un vértice, éstos quedan segmentados en dos triángulos. Por ello, la suma de los ángulos interiores de los cuadriláteros es igual a 360° = 2(180°).

En general, la suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados se calcula mediante la fórmula:

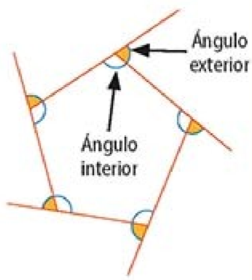
$$(n-2)\cdot 180°$$

Ángulos exteriores

¿Crees que la suma de los ángulos exteriores se comporta como la suma de los ángulos interiores, es decir, que entre más lados tenga el polígono, la suma de los ángulos exteriores se incrementa?

En concreto

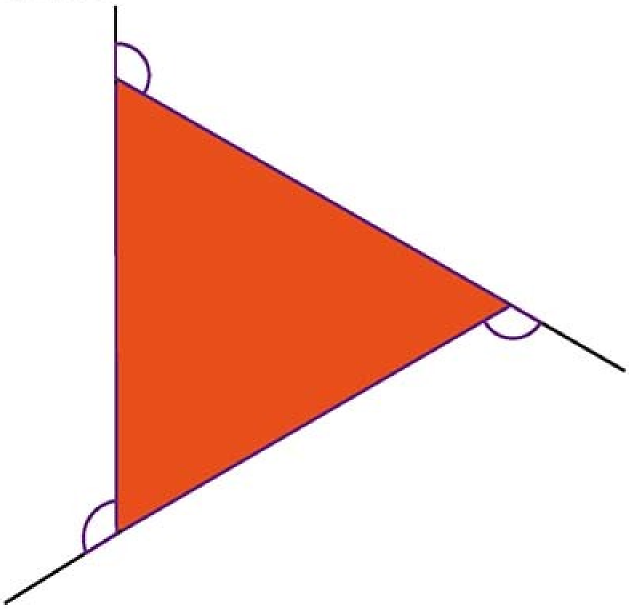
Los *ángulos exteriores* de un polígono son aquellos que se forman entre uno de sus lados y la prolongación de otro **adyacente** al primero como se muestra en la siguiente imagen:



Para realizar las siguientes actividades es necesario que cuentes con un transportador, una regla y un lápiz.

a) Traza en tu cuaderno los siguientes polígonos, no es necesario que sean regulares: heptágono, octágono y dodecágono.

b) Identifica todos los ángulos exteriores en los polígonos que trazaste. Toma como referencia la siguiente imagen en la que se han identificado los ángulos exteriores de un triángulo equilátero.



c) Mide con el transportador, en cada figura, los ángulos que identificaste en el inciso anterior y calcula su suma.

d) De los resultados obtenidos en el inciso ***c***), ¿qué **conjetura** puedes formular sobre el valor de la suma de los ángulos exteriores de un polígono?

Comparte tus respuestas con el grupo; verifiquen si todos llegaron a la siguiente conclusión respecto de la suma de los ángulos exteriores de un polígono:

La suma de los ángulos exteriores de un polígono es igual a 360°.

En caso de no haber llegado a esa conclusión, revisen el concepto de ángulo exterior, así como las construcciones que realizaron y los cálculos que hicieron.

Glosario

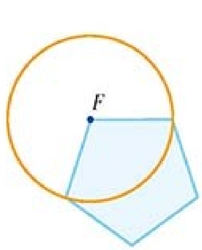
adyacente. Que es inmediato o está próximo.
conjetura. Idea o suposición que se construye en base a la observación o la experiencia.

El centro y los ángulos centrales

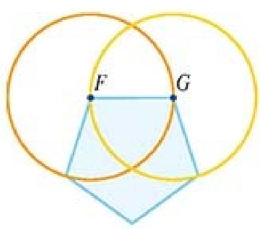
Lee con atención el siguiente procedimiento y llévalo a cabo en tu cuaderno con ayuda de tu juego de geometría. Al hacerlo comprenderás el concepto de centro de un polígono regular.

1. Selecciona un vértice F, abre el compás de acuerdo con la longitud de un lado, y traza una circunferencia con centro en F.
2. Selecciona un vértice G adyacente al primero, y repite el paso 1.
3. Traza una línea recta que pase por los puntos P_1 y P_2, donde las circunferencias se cortan.
4. En el otro vértice E, adyacente al primero que elegiste, repite el trazo de la circunferencia y une mediante una recta los puntos Q_1 y Q_2, donde se cortan las dos circunferencias.
5. Identifica el punto C, donde las rectas trazadas en los pasos 3 y 4 se cortan. Ese punto es el centro del polígono regular.

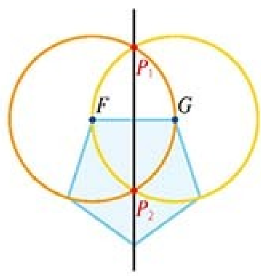
Paso 1



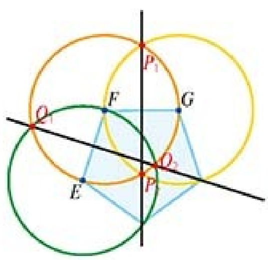
Paso 2



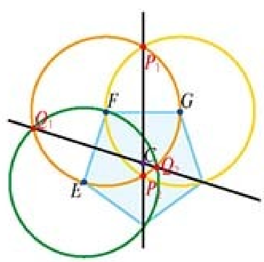
Paso 3



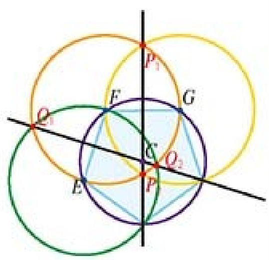
Paso 4



Paso 5



Paso 6



Para practicar, encuentra el centro un triángulo equilátero y un cuadrado.

En concreto

Se llama *centro* porque, si colocas una de las puntas del compás en él, lo abres hasta alcanzar un vértice del polígono regular y luego trazas una circunferencia, notarás que la circunferencia pasa por todos los vértices. Observa la ilustración del paso 6.

Visión matemática

¿Por qué los polígonos irregulares no pueden tener centro?

Para realizar las actividades necesitan un lápiz, un compás y una regla. Respondan a lo siguiente.

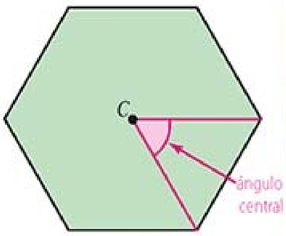
a) ¿En qué tipo de triángulo es posible encontrar su centro?
b) ¿Qué hay con respecto al centro de un cuadrilátero?
c) Encuentren el centro de un hexágono y un octágono regulares. Determinen la medida de cada ángulo exterior de estas figuras.

Compartan sus respuestas con otras parejas, así como los procedimientos que cada uno siguió y corrijan lo que sea necesario.

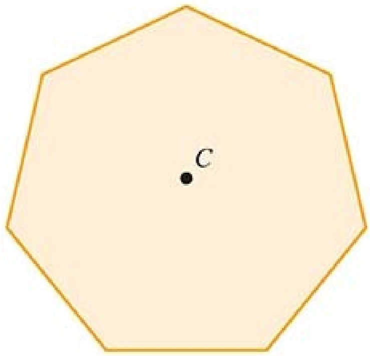
En concreto

Un *radio* de un polígono regular es el segmento de recta que va del centro a uno de sus vértices.

Un *ángulo central* de un polígono regular es el que se forma por dos radios que pasan por los vértices de cualquier lado.



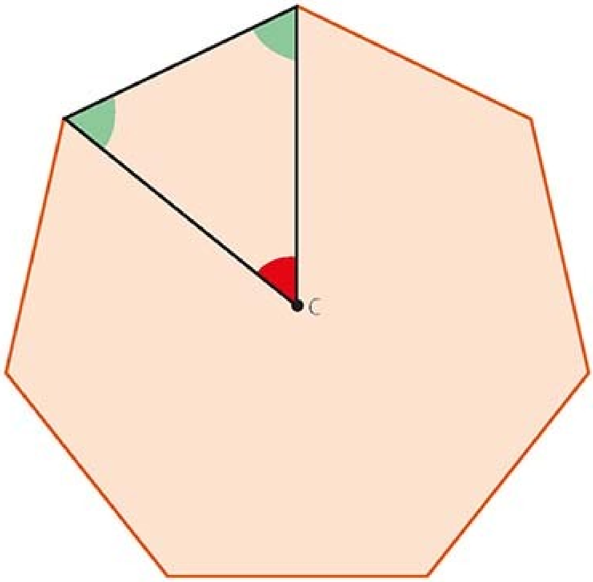
Considera el siguiente polígono, un heptágono regular. Realiza lo que se solicita a continuación.



a) Verifica que el punto marcado con C es el centro del heptágono regular.
b) Traza desde el centro C dos segmentos rectilíneos hacia dos vértices que sean adyacentes. Éstos son radios del polígono.
c) Obtén la medida del ángulo cuyo vértice es el centro C y sus lados son los radios que trazaste en el inciso anterior.
d) Repite lo hecho en los incisos ***b)*** y ***c)*** con otros pares de vértices. Establece cuál es la medida de un ángulo central en un heptágono regular.
e) ¿Cuánto suman las medidas de todos los ángulos centrales en el heptágono regular?
f) Justifica que la suma de la medida de todos los ángulos centrales en un polígono regular de cualquier número de lados es 360°.
g) Con base en el inciso anterior, concluye que la expresión $\frac{360^\circ}{n}$, donde n es el número de lados del polígono, permite calcular la medida de uno de sus ángulos centrales.

Traza algunos polígonos regulares, identifica sus ángulos centrales y comprueba la validez de la expresión $\frac{360^\circ}{n}$.

Usen la siguiente imagen para explicar la relación que hay entre los ángulos centrales y los ángulos interiores de un polígono.



Comenten sus ideas y regístrenlas por escrito. Pueden trazar otros polígonos regulares y sus ángulos centrales para que puedan aclarar y ahondar en sus ideas. Escriban una conclusión en común.

Analicen los siguientes enunciados y luego realicen lo que se pide en cada uno de ellos.

a) Determinen la longitud del radio de un cuadrado de 5 centímetros de lado *inscrito* en una circunferencia.
b) Tracen un cuadrado *circunscrito* a una circunferencia cuyo radio es de 7 centímetros.
c) Determinen la medida del ángulo central para un triángulo equilátero y un hexágono regular.
d) Para un octágono regular, ideen un procedimiento que les permita determinar la medida de uno de sus ángulos internos o la medida de uno de sus ángulos centrales cuando sólo conocen el valor de una, y sólo una, de las medidas de alguno de los dos ángulos.

Comparen los procedimientos que usaron con otros equipos, validen cada uno de ellos y decidan cuáles les parecen los más claros y sencillos.

Enl@ce

Utiliza el recurso interactivo disponible en el siguiente enlace http://2633518-0.web-hosting.es/blog/mistrabajos/intugeom/unidades/poligons/polig2_p.htm para recordar y practicar diversos conceptos relacionados con los polígonos como diagonales, ángulos internos, trazado, etcétera.

En concreto

Una figura geométrica A está *inscrita* en otra figura B si los vértices de A tocan los lados o el contorno de B; en ese caso, también se dice que B *circunscribe* a A.

En la siguiente imagen el pentágono está inscrito en el círculo.

Inscrito

En esta otra, es el pentágono el que circunscribe al círculo.

Circunscrinscrito

Construcción de polígonos regulares

Has deducido algunas propiedades de los ángulos de los polígonos regulares. Ahora surge el problema de cómo se puede construir un polígono regular si sólo cuentas con ciertos datos.

Recupera tus conocimientos sobre el trazo de triángulos, dibuja seis triángulos equiláteros de la misma medida y recórtalos. Usa material reciclado (papel, cartón, plástico, etc) para hacer lo anterior. Luego realiza lo que se solicita a continuación.

a) Arma un hexágono usando los triángulos.
b) ¿Es regular el hexágono que armaste? ¿Por qué?
c) ¿Cuál es la medida de los lados del hexágono?
d) ¿Cuál es el centro del hexágono?
e) ¿Cuál es la medida del radio del hexágono?
f) ¿Cuánto mide el ángulo central en el hexágono? ¿Esta medida depende de la medida del lado del triángulo que trazaste? Explica tu respuesta.
g) ¿Cuánto mide cada ángulo interno del hexágono? ¿Es necesario tomar la medida? ¿Por qué?
h) ¿Cuánto miden los ángulos externos del hexágono? ¿Cómo lo sabes?

Compara tus respuestas con la de un compañero y cotejen sus hexágonos, luego determinen si sus respuestas son independientes de la medida del lado de los triángulos iniciales. También reflexionen sobre este procedimiento y determinen si es válida su generalización para construir otros polígonos o, en su caso, expongan las condiciones iniciales bajo las cuales se pueden "armar" polígonos regulares.

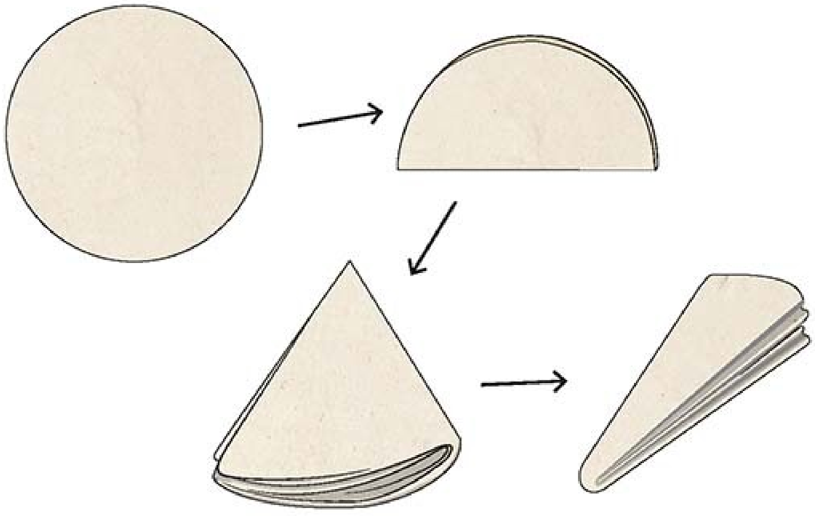
Visión matemática

¿Puedes formar otros polígonos regulares a partir de triángulos equiláteros?, ¿cuáles serían esos polígonos?

Antes de abordar el tradicional método de construcción de polígonos con regla, compás y transportador, verás algunos procedimientos ingeniosos que te permitirán construir diferentes polígonos regulares.

Dibujen en material reciclado dos círculos del mismo tamaño y recórtenlos. Uno de ustedes doble un círculo por la mitad tres veces seguidas (procedimiento 1). El otro, doble un círculo primero por la mitad y luego haga dos dobleces, de tal manera que la mitad del círculo quede doblado en tres partes iguales (procedimiento 2). En la siguiente página pueden observar los procedimientos que deben seguir.

El procedimiento 1 se ilustra a continuación:



El procedimiento 2:

Luego realicen lo que se solicita a continuación.

a) Cada uno desdoble el círculo. Tracen líneas rectas para unir los puntos sobre la circunferencia que están marcados por los dobleces que hicieron.
b) ¿Qué polígono se formó según las instrucciones del procedimiento 1? ¿Es regular? ¿Por qué?
c) ¿Qué polígono se formó según las instrucciones del procedimiento 2? ¿Es regular? ¿Por qué?
d) ¿Cuántos grados abarca la circunferencia completa?
e) Considerando la respuesta a la pregunta anterior, ¿cuánto miden los ángulos centrales del polígono formado según el procedimiento 1? ¿Y los ángulos centrales del polígono formado en procedimiento 2?
f) ¿Hay alguna relación entre los radios de las circunferencias iniciales y los radios de los polígonos resultantes? ¿Cuál es?
g) ¿Cuánto miden los lados de los polígonos en ambos casos? ¿Hay alguna relación entre la medida del radio de la circunferencia inicial y los lados de los polígonos resultantes? Expliquen.

Corrijo y aprendo

Si el material que utilizaste para hacer tu actividad es muy grueso, es posible que las medidas varíen notablemente. Si es el caso, repite la actividad, ahora con papel más delgado.

h) ¿Cuánto miden los ángulos interiores de cada uno de los polígonos formados? ¿Tuvieron que tomar la medida usando el transportador? ¿Por qué?

i) Describan cuántos y cuáles son los dobleces que hay que realizar en un círculo para obtener un dodecágono regular. ¿Hay manera de doblar un círculo y obtener un heptágono regular? Justifiquen sus respuestas.

Comparen sus respuestas con otras parejas, corrijan lo que sea necesario y en conjunto ideen un método para trazar polígonos regulares a partir de una circunferencia. Con base en el procedimiento ideado, tracen un triángulo equilátero, un cuadrado y un decágono en tres circunferencias del mismo tamaño.

En la actividad anterior aprendieron a trazar polígonos regulares a partir del ángulo central; ahora idearán un método para dibujar un polígono regular a partir de la medida de sus lados.

Reúnanse en equipos. Cada equipo trabaje con círculos de la misma medida de radio entre los que pueden escoger los siguientes: 4 cm, 5 cm y 6 cm. Entre todos los integrantes deben trazar, de acuerdo con el método que idearon en la actividad anterior, los siguientes polígonos regulares: triángulo equilátero, cuadrado, pentágono, hexágono, octágono, nonágono, decágono y dodecágono. Realicen lo que se solicita a continuación:

a) Reproduzcan y completen en sus cuadernos tablas como la siguiente para cada figura.

Triángulo equilátero			
Radio de la circunferencia (cm)	4	5	6
Medida del lado (cm)			

b) ¿Qué relación existe entre el radio de la circunferencia y la medida del lado del polígono que se puede trazar con ella? Argumenten su respuesta.

c) ¿Qué relación existe entre la medida de los ángulos centrales de los polígonos y el lado del polígono? Argumenten su respuesta.

d) ¿En qué polígono se cumple que la medida del radio de la circunferencia es igual a la medida de sus lados? ¿A qué creen que se deba?

Visión matemática

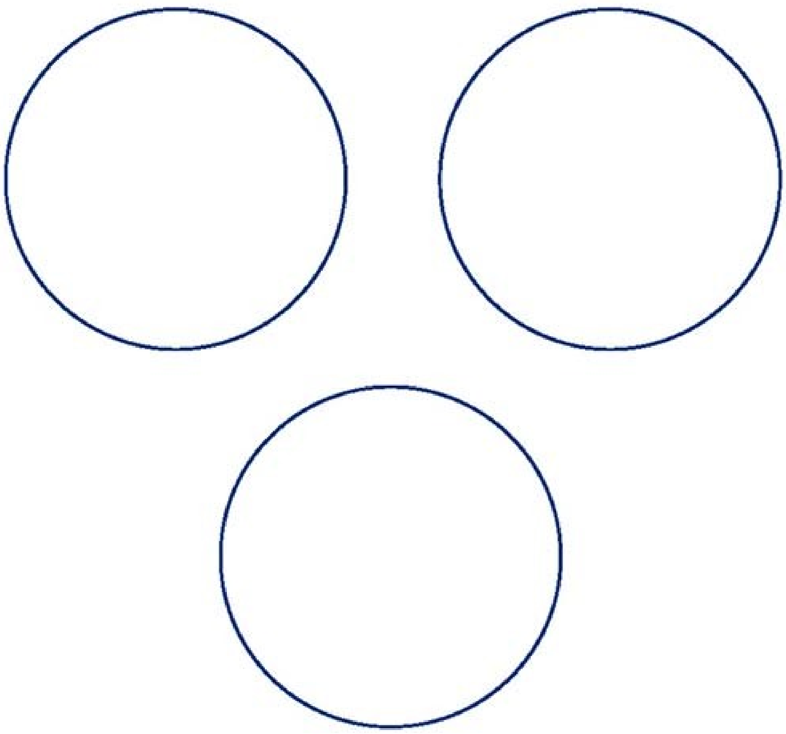
Recuerda que los instrumentos de trazado (regla, escuadras, transportador y compás) deben estar en las mejores condiciones posibles, además de que el lápiz deberá tener punta fina para que haya precisión en tus trazos.

e) ¿Cuál es la medida de la circunferencia con la que el cuadrado que se puede trazar a partir de ella tiene un lado de 7 cm aproximadamente?

f) ¿Qué radio debe tener una circunferencia para que el pentágono regular que se puede trazar a partir de ella tenga un lado de 3.5 cm aproximadamente?

g) ¿Cuál será la medida aproximada del lado del triángulo equilátero que se puede trazar a partir de una circunferencia de 7 cm de radio? ¿Y con respecto a una circunferencia de 8 cm de radio?

h) En las siguientes circunferencias tracen un triángulo equilátero, un cuadrado y un hexágono, respectivamente. Primero traten de predecir la medida de los lados de los polígonos trazados y luego compruébenlo realizando los trazos.



i) A partir de todo lo anterior, ¿pueden formular las relaciones observadas de forma algebraica? Justifiquen su respuesta.

En plenaria, revisen los procedimientos que siguieron para trazar los polígonos, así como las respuestas a lo anterior. La idea es que puedan formular un método que les permita construir un polígono regular a partir de conocer cuál es la medida de uno de sus lados.

πensa

Para consolidar los conocimientos que adquiriste durante esta secuencia realiza las siguientes actividades.

a) Usa los procedimientos y todas las propiedades que has observado en los polígonos regulares para completar la siguiente tabla. En tu cuaderno, ilustra cada uno de los primeros ocho polígonos regulares usando los procedimientos que aprendiste durante el estudio de esta secuencia didáctica.

Polígono regular	Vértices	Lados	Diagonales en total	Medida de un ángulo interno	Medida de un ángulo externo	Medida de un ángulo central	Suma de ángulos internos	Suma de ángulos externos

Comenta con tus compañeros las diversas relaciones y patrones que observas.

b) Justifica si es posible trazar un pentágono regular cuyo lado mida 6 cm en un pedazo de papel de 10 cm x 12 cm.

c) Realiza una composición artística cuyos principales elementos sean los polígonos regulares. En grupo pueden organizar una exposición para mostrar los diseños creados y premiar al más original.

Después de cotejar y validar las respuestas, determinen cuáles fueron las ideas y conceptos matemáticos que más dudas generaron, recuerden escuchar las opiniones de todos de forma respetuosa. Para tratar de superar las dificultades escriban en el pizarrón las principales ideas de los temas abordados, pero asegúrense de que las comprenden.

Corrijo y aprendo

Si al contestar esta sección notas que aún tienes dudas de los contenidos de esta secuencia, revisa el material necesario para reafirmar el conocimiento y cuando te sientas preparado, resuélvela.

Pruébate

Selecciona la respuesta correcta para cada cuestión.

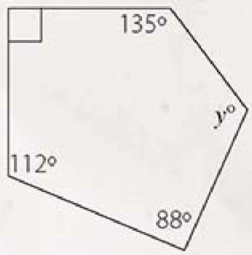
1. ¿Cuál es el polígono regular cuyos ángulos interiores miden 150°?

   a) Hexágono *b)* Decágono *c)* Octágono *d)* Dodecágono

2. ¿Cuál es el valor numérico de la relación *ángulo interno* + *ángulo central*?

   a) 90° *b)* 180° *c)* 270° *d)* 360°

3. ¿Cuál es el valor del ángulo marcado con y en la siguiente figura?



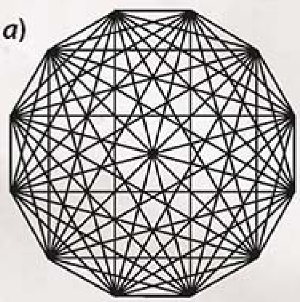
   a) 25° *b)* 115° *c)* 151° *d)* 295°

4. ¿Cuál es la suma de los ángulos exteriores de un polígono de veinte lados?

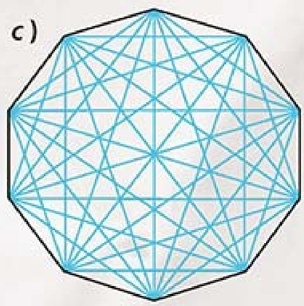
   a) 360° *b)* 1080° *c)* 1800° *d)* 3240°

5. Mediante la fórmula, por conteo directo o usando el procedimiento de tu elección, determina en cuál de los siguientes polígonos se encuentran trazadas un total de 35 diagonales.

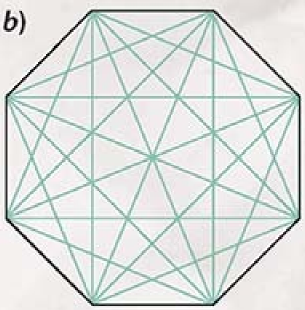
a)



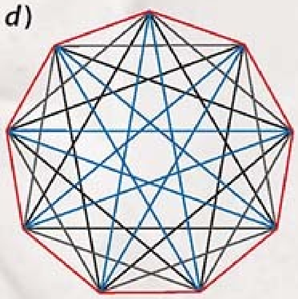
c)



b)



d)



Resuelve problemas que implican conversiones en múltiplos y submúltiplos del metro, litro, kilogramo y de unidades del sistema inglés (yarda, pulgada, galón, onza y libra)

Empieza

Recuerda lo que ya sabes sobre diferentes unidades de medida. Resuelve las siguientes actividades y compara tus respuestas con un compañero. Juntos analicen los conocimientos que utilizaron para contestar, ubiquen los posibles errores y corríjanlos..

a) Si no tuvieras una regla o algún instrumento de medida ¿cómo obtendrías las dimensiones de tu aula o salón de clases?

b) Marca con una ✓ el recuadro que corresponda a la masa estimada de los objetos que se ilustran.

- ☐ Menos de un kilo
- ☐ Un kilo exacto
- ☐ Más de un kilo

- ☐ Menos de un kilo
- ☐ Un kilo exacto
- ☐ Más de un kilo

- ☐ Menos de un kilo
- ☐ Un kilo exacto
- ☐ Más de un kilo

- ☐ Menos de un kilo
- ☐ Un kilo exacto
- ☐ Más de un kilo

c) ¿A qué magnitud corresponden las unidades de las imágenes? Escríbelas en los recuadros.

En concreto

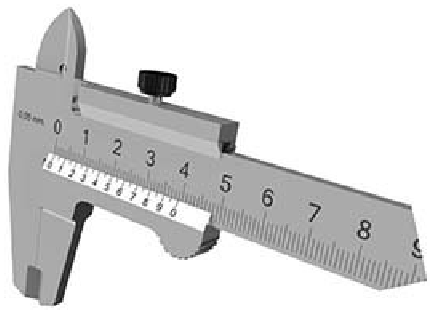
Es posible medir diferentes propiedades físicas, por ejemplo: la masa en kilogramos (kg), la longitud en metros (m) y el tiempo en segundos (s).

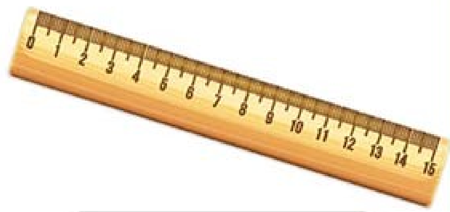
Avanza

Instrumentos para medir distancias

Lee con atención la siguiente información y úsala para responder las preguntas que se encuentran a continuación.

En las siguientes imágenes puedes observar tres instrumentos para medir distancias o longitudes. Un flexómetro es una cinta métrica metálica enrollada a presión dentro de una caja; un vernier es un instrumento constituido por un par de reglas, una fija y una deslizante, y unos bordes que facilitan la medida de algunas dimensiones; y una regla graduada puede estar hecha de diferentes materiales, es de forma rectangular y sirve para trazar líneas rectas, o para medir la distancia entre dos puntos.





a) Identifica a cada instrumento con su nombre y escríbelo debajo de cada uno de ellos.
b) Escribe dos semejanzas y dos diferencias entre los tres instrumentos de medición.
c) ¿Cuál es el instrumento más **preciso** de los tres? ¿Por qué?
d) ¿Qué instrumento usarías para medir tu altura? ¿Por qué?
e) ¿Qué instrumento usarías para medir el largo de tu lápiz? ¿Por qué?
f) ¿Qué instrumento te permite medir el ancho de una **tuerca**? ¿Se requiere ser preciso en esta medición? ¿Por qué?

Glosario

preciso. Es la característica de un instrumento de medida que indica que con él se pueden tomar magnitudes con un error mínimo.

tuerca. Es la pieza con un hueco labrado en espiral que permite ajustar un tornillo.

g) ¿Qué instrumento es el que usas en tus clases de matemáticas? Además menciona tres razones por la que es el más conveniente en este caso.

Comenta tus respuestas con un compañero, analicen las ventajas y desventajas de cada instrumento de medición e investiguen los principales usos de cada uno.

Como te habrás dado cuenta, la elección del instrumento depende del uso que se le dará: no es lo mismo medir un terreno que el diámetro o la anchura de un pequeño componente mecánico.

Además, para analizar sus ventajas y aplicaciones es necesario tomar en cuenta la escala en la que los instrumentos están graduados: un vernier tiene una escala en milímetros; una regla graduada indica la medida en centímetros y milímetros y un flexómetro está graduado en milímetros, centímetros y metros.

Para la siguiente actividad requieren tener a la mano la regla graduada de su juego de geometría.

a) Observen la regla, en el siguiente espacio escriban una breve descripción de ella. Mencionen aspectos como su longitud máxima y la escala en la que está graduada.

b) ¿La longitud máxima está expresada en metros, centímetros o milímetros? ¿A qué creen que se deba?
c) ¿Cuántos milímetros hay en un centímetro? ¿Cuántos milímetros hay marcados a lo largo de toda la regla? ¿Hay alguna relación entre los milímetros y los centímetros? Expliquen dicha relación.
d) ¿Cuántos milímetros hay en 5 cm? ¿Cuántos milímetros hay en 10.5 centímetros?
e) ¿A cuántos centímetros equivalen 215 milímetros? ¿Y 30 milímetros a cuantos centímetros corresponden?

En su cuaderno, tracen un cuadrado de 25 milímetros de lado y compárenlo con el de otras parejas. Expliquen a qué se deben las diferencias que encuentren o, en su caso, justifiquen por qué coinciden las figuras trazadas.

Visión matemática

¿Cómo se medían las distancias en la antigüedad?

¿Por qué hubo la necesidad de establecer un sistema de medidas a nivel internacional?

El Sistema Internacional de Unidades (SI)

El Sistema Internacional de Unidades (conocido con la sigla SI), es el que se utiliza en casi todos los países del mundo. Fue creado por la Conferencia General de Pesas y Medidas, un grupo internacional de trabajo que establece decisiones y criterios referentes a la medición de magnitudes, lo que garantiza su estandarización.

Recuerda que una magnitud es cualquier propiedad de los cuerpos que se puede medir, como la longitud, la masa y la capacidad, entre otras.

Para medir una cantidad de una magnitud, se requiere compararla con otra cantidad fija, llamada unidad de medida. Por ejemplo, las longitudes se comparan con el metro, las masas con el kilogramo y las capacidades con el litro.

El SI está constituido por siete unidades básicas. A partir de su combinación se obtienen todas las unidades derivadas, como la de velocidad (m/s). En la tabla siguiente se indican las siete unidades del SI, su símbolo y la magnitud correspondiente.

Magnitud	Unidad	Símbolo
Longitud	metro	m
Masa	kilogramo	kg
Tiempo	segundo	s
Corriente eléctrica	ampere	A
Temperatura	kelvin	K
Intensidad luminosa	candela	cd
Cantidad de sustancia	mol	mol

Transversalidad

Las magnitudes y unidades básicas o fundamentales del SI son de uso frecuente en las asignaturas de Ciencias.

El pensamiento matemático te ayuda a comprender los principios para manipularlos numérica y algebraicamente.

En tu cuaderno, indica cuáles de las siguientes propiedades pueden ser medidas. Respecto de aquellas que permitan medición, indica además cuál es la magnitud correspondiente y la unidad apropiada. Compara tus respuestas con las de un compañero.

El nivel de acidez del jugo de limón.	El color del pelo.	La masa de una ballena.
La profundidad de una alberca.	La honestidad.	El contenido en una jeringa.
El enojo.	La estatura de una persona.	La sudoración.

Realicen una investigación para conocer la historia del SI y la evolución de la medición de las magnitudes físicas. Cada equipo puede encargarse de investigar a profundidad una magnitud y unidad fundamentales del sistema. El resultado conjunto lo pueden plasmar en una línea del tiempo o en un periódico mural.

Prefijos del SI

Una magnitud puede medirse con unidades diferentes. Elegir una u otra depende del contexto en el que se vaya a emplear. Por ejemplo, no sería adecuado medir en minutos o en horas la velocidad de un velocista profesional de 100 m planos, porque la competencia en que participa dura escasos segundos.

Glosario

prefijo. Es una partícula o secuencia lingüística que se agrega antes de una palabra, y que da por resultado una palabra derivada, pero con un significado distinto.

Es por ello que el SI utiliza **prefijos** que facilitan la expresión de cantidades muy grandes o muy pequeñas. En la actualidad existen 20 prefijos, pero en la siguiente tabla sólo se muestran los más comunes.

Prefijo	Símbolo	Potencia de 10		Notación decimal
mega	M	10^6	=	1 000 000
kilo	k	10^3	=	1 000
hecto	h	10^2	=	100
deca	da	10^1	=	10
		unidad base		
deci	d	10^{-1}	=	0.1
centi	c	10^{-2}	=	0.01
mili	m	10^{-3}	=	0.001

En concreto

Como puedes observar en la tabla de prefijos, los múltiplos y submúltiplos de una unidad de medida están relacionados con la unidad base por potencias de 10.

Por ejemplo, un kilómetro es $10^3 = 1\,000$ veces mayor que el metro, y un milímetro es $10^{-3} = 0.001$ veces menor que el metro.

El nombre de los múltiplos y submúltiplos se forma mediante prefijos a los que se añade el nombre de la unidad principal. Por ejemplo, si la unidad base es el metro (m), los prefijos kilo (k) y centi (c), dan origen al kilómetro (km) y al centímetro (cm), respectivamente.

Es necesario aclarar que una unidad con el prefijo mega es un millón de veces mayor que la unidad base, pero sólo mil veces mayor que aquélla con el prefijo kilo. En el caso de los demás prefijos de la tabla, cada unidad es diez veces mayor que la inmediata inferior y diez veces menor que la inmediata superior. Por ejemplo, un kilómetro es mil veces mayor que el metro, y el centímetro es cien veces menor que el metro.

Tomando en cuenta la tabla de prefijos del SI, así como la información del texto anterior, completa los espacios con los números 10, 100, 1000… según corresponda.

Un hectómetro es ______ veces mayor que el metro, pero sólo es ______ veces mayor que el decámetro.

Un decilitro es ______ veces menor que un decalitro, pero es ______ veces mayor que mililitro.

Un megámetro es ______ veces mayor que decámetro y es ______ veces mayor que un hectómetro.

Compara tus respuestas con las de un compañero. Si les quedaron dudas, propongan más enunciados similares para completarlos.

Conversiones entre unidades

A continuación, explora diversas maneras de realizar conversiones. Elige el procedimiento que te parezca más eficiente, o utiliza una combinación de ellos para resolver distintos problemas que involucran la conversión entre unidades.

Para convertir 0.025 decámetros (dam) a milímetros (mm) realiza lo que se indica en cada caso.

a) ¿Cuántos metros hay en 1 dam? Escribe la equivalencia a continuación:

b) ¿Cuántos milímetros hay en 1 m? Escribe la equivalencia:

c) A partir de los dos incisos anteriores, relaciona dam y mm mediante una equivalencia.

d) Observa las siguientes reglas de tres. Elige aquélla que relacione de forma adecuada las cantidades que se quieren convertir.

1 dam	______	10 000 mm
0.25 dam	______	x

1 dam	______	1 000 mm
0.25 dam	______	x

1 dam	______	100 000 mm
0.25 dam	______	x

1 dam	______	x
0.25 dam	______	10 000 mm

e) Resuelve la regla de tres que elegiste en el inciso anterior; determina si la respuesta tiene sentido y es correcta. Verifica si hay más de una regla de tres correcta en el inciso ***c***).

f) Plantea una regla de tres para realizar las siguientes conversiones.

- 160 dam a hm
- 1 468 mm a dm
- 2.5 hm a cm
- 0.4 km a dm
- 18 500 cm a m

Compara tus cálculos y tus respuestas con los de un compañero. Expliquen su forma de plantear las reglas de tres, y definan si en cada caso hay una única regla de tres que se pueda plantear, o si hay más de una que sea posible utilizar.

Visión matemática

De ser necesario revisa la información correspondiente a la regla de tres.

Para hacer conversión entre unidades son útiles los factores de conversión. Dichos factores son equivalencias, escritas en forma de razón, entre dos magnitudes.

Por ejemplo, 1 000 gramos = 1 kilogramo, expresión que puede escribirse de dos maneras como factor de conversión:

$$\frac{1\,000\text{ g}}{1\text{ kg}} \quad \text{o} \quad \frac{1\text{ kg}}{1\,000\text{ g}}$$

Se usará uno u otro factor, dependiendo de la conversión a realizar.

Realicen lo que se solicita.

a) Para la equivalencia 1 hm = 100 m, cada uno de ustedes deberá escribir alguno de los dos factores de conversión que corresponda.

$$\frac{\boxed{}}{\boxed{}} \qquad \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$$

b) Utilicen su conocimiento sobre multiplicación y división de fracciones y decimales para convertir 2.5 hm a m. Multipliquen dicha cantidad por el factor de conversión que le corresponda.

$$2.5\text{ hm} \times \frac{\boxed{}}{\boxed{}} = \qquad 2.5\text{ hm} \times \frac{\boxed{}}{\boxed{}} =$$

c) ¿Cuál es el factor de conversión adecuado para convertir hm a m, de acuerdo con los resultados del inciso anterior? Justifiquen su elección.

d) En cada caso, tachen el factor de conversión adecuado para hacer la conversión entre las unidades indicadas.

De cm a km	$\frac{100\,000\text{ cm}}{1\text{ km}}$	$\frac{1\text{ km}}{100\,000\text{ cm}}$
De mg a g	$\frac{1\text{ g}}{1\,000\text{ mg}}$	$\frac{1\,000\text{ mg}}{1\text{ g}}$
De mL a L	$\frac{1000\text{ mL}}{1\text{ L}}$	$\frac{1\text{ L}}{1000\text{ mL}}$
De mm a cm	$\frac{1\text{ cm}}{10\text{ mm}}$	$\frac{10\text{ mm}}{1\text{ cm}}$
De cg a dag	$\frac{1\text{ dag}}{1\,000\text{ cg}}$	$\frac{1\,000\text{ cg}}{1\text{ dag}}$

e) Realicen las siguientes conversiones:

2 500 cm a km | 250 mL a L | 22 600 cg a dag | 5 mg a g | 4.2 mm a cm

Planteen y resuelvan reglas de tres para verificar los resultados de las conversiones. Comparen las ventajas y desventajas de cada procedimiento y definan cuál consideran más útil.

En concreto

Recuerden que es posible simplificar las fracciones si al multiplicar aparecen términos comunes en el numerador y denominador.
Por ejemplo:

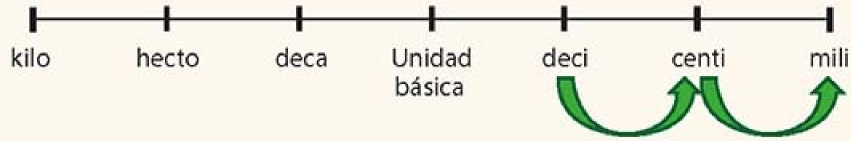
$$\frac{3}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{3 \times \cancel{4}}{5 \times \cancel{4}} = \frac{3}{5}$$

$$a \times \frac{c}{a} = \frac{\cancel{a} \times c}{\cancel{a}} = c$$

Lean con atención el procedimiento que Petra utilizó para convertir 5 decímetros (5 dm) a milímetros (mm) y respondan lo que se solicita.

1. Estableció una recta horizontal en la que colocó los prefijos de los múltiplos y los submúltiplos de la unidad básica.

2. Luego, consideró la conversión a realizar. Por ejemplo, para determinar cuántos milímetros hay en 5 decímetros.
3. Primero ubicó los prefijos de las unidades de medida en la recta anterior, deci y mili.
4. Dado que inicia en el prefijo deci y quiere obtener el resultado en mili, se desplazó dos lugares a la derecha.



5. Petra concluyó que si se desplaza el punto decimal del número 5 dos lugares a la derecha, se obtiene 500, es decir, 5 decímetros equivalen a 500 milímetros.

a) ¿Cuál es el papel que ocupa la posición del punto decimal en el procedimiento que siguió Petra? Describan con detalle cómo funciona este procedimiento.

b) Determinen si el procedimiento se altera si en la recta los prefijos de los múltiplos se colocan a la derecha y los prefijos de los submúltiplos se colocan a la izquierda de la unidad básica. En caso afirmativo, expliquen cómo se modifica el procedimiento descrito.

d) ¿Qué cambios tendrían que hacerse si la recta fuera vertical en lugar de horizontal?

e) Realicen las siguientes conversiones utilizando el procedimiento de Petra, o el que consideren más conveniente.

- 45 000 cm a hm
- 2 599 mL a L
- 0.75 km a dm
- 0.4 cg a mg
- 27 500 m a km

Justifiquen la validez del método que siguió Petra y compárenlo con los procedimientos de la regla de tres y de los factores de conversión. De forma grupal, lleguen a un consenso sobre cuál consideran más eficiente.

Visión matemática

Sin realizar operaciones o cálculos piensa por qué la respuesta que obtuvo Petra tiene sentido.

Considera la siguiente situación:

Don Luis realizó un viaje el mes pasado. Recorrió 420 km en un ferrocarril, 360 hm en automóvil y 5 235 m a pie.

a) Determina la distancia que recorrió Don Luis en su viaje, expresando el resultado en kilómetros.
b) ¿Cuántas unidades diferentes intervienen en el problema? ¿Cuáles son?
c) ¿En qué unidades debe estar expresado el resultado?
d) Con base en la respuesta al inciso anterior, ¿cuántas conversiones de unidades tendrías que realizar?
e) ¿La respuesta será mayor o menor a 240 km? ¿Por qué?
f) Realiza las conversiones adecuadas con base en el procedimiento que te parezca más conveniente y escribe el resultado.
g) Usa el resultado del problema y supón que Don Luis parte desde tu localidad, ¿a qué estado de la República Mexicana podría llegar si recorre dicha distancia?

Compara tus respuestas con un compañero y, si sus respuestas difieren, verifiquen que las conversiones hayan sido realizadas de manera correcta.

Corrijo y aprendo

En diversas operaciones supervisadas por la National Aeronautics and Space Administration (NASA, por sus siglas en inglés) se han cometido varios errores de cálculo al realizar conversiones entre diferentes sistemas de medidas. Esos errores han provocado desastres con pérdidas económicas cuantiosas. Tú debes asegurarte de realizar los cálculos con precisión.

Lean la siguiente situación y respondan lo que se solicita.

Hace años sólo existían los teléfonos fijos, no había celulares. Para que éstos funcionaran era necesario instalar postes que llevaran los cables telefónicos entre diferentes pueblos. Si, por ejemplo, se requería que entre cada poste hubiera 48 metros de distancia entre ellos, ¿cuántos postes era necesario instalar para comunicar dos pueblos que estuvieran separados una distancia de 96 kilómetros?

a) Estimen el resultado del problema.
b) ¿Cuántos postes se instalan en una distancia de 96 metros? ¿Y en 960 metros de distancia?
c) ¿Es necesario realizar alguna conversión de unidades para resolver el problema? ¿Cuál?
d) ¿El resultado debe ser un número entero? ¿Por qué?

Comparen sus resultados con otras parejas, comparen los métodos que usaron para resolver el problema y determinen la practicidad de cada uno.

Enl@ce

Practica lo que has aprendido, para ello resuelve los ejercicios 2, 3, 4 y 5 que se encuentran en el documento digital disponible en el siguiente enlace http://mates1sec.googlepages.com/01-longitud.pdf

El kilogramo

El kilogramo es la unidad básica en el SI para medir la masa, es decir, la cantidad de **materia** de un cuerpo y aunque la masa y el peso no son lo mismo en el ámbito científico, desde un punto de vista práctico y cotidiano no se hace distinción entre ellos.

Además, nota que un kilogramo no es una unidad en sí misma, sino un múltiplo de un gramo, es decir, un kilogramo son mil gramos.

Glosario

materia. Es todo lo que tiene masa y ocupa un volumen. Algunos ejemplos de materia son la madera, el agua o el aire.

Completa la siguiente tabla con los múltiplos y submúltiplos más comunes del gramo.

	Unidad de medida	Símbolo	Equivalencia en gramos	En notación científica
Múltiplos				
Unidad básica	gramo	g	1	1×10^0
Submúltiplos				

Reescribe la tabla anterior cambiando las dos últimas columnas en términos del kilogramo, es decir, reescribe la tabla considerando que la unidad básica es el kilogramo.

Visión matemática

Con anterioridad ya completaste una tabla similar, apóyate en ella para realizar esta actividad.

Biblioteca

Puedes consultar el libro *La medición y sus unidades* de Francisco Noreña Villarías y Juan Tonda Mazón para conocer más sobre las unidades y sus equivalencias.

Pide una sugerencia bibliográfica similar a tu profesor para que puedas conocer más del tema.

Junto con un compañero, escriban dos ejemplos de la vida cotidiana donde se utilicen múltiplos del gramo y dos ejemplos donde se haga uso de los submúltiplos del gramo. Si es posible, ilustren dichos ejemplos o muestren en clase objetos cuyas masas sean múltiplos o submúltiplos del gramo.

Otros sistemas de medidas

El Sistema Internacional de Unidades (SI) ha sido adoptado por casi todos los países y territorios independientes del mundo, excepto tres: Estados Unidos, Liberia y Birmania.

El sistema tradicional de unidades de medida de Estados Unidos de América (EUA) se inspiró en el sistema de unidades imperial, con el que Reino Unido unificó los pesos y medidas en sus colonias a principios del siglo XIX.

Entre las unidades de medidas más empleadas en México del sistema tradicional de EUA, se encuentran la yarda, la pulgada, el galón, la onza y la libra.

Proporciona un ejemplo de uso en la vida cotidiana de cada una de las unidades de medida mencionadas en el párrafo anterior. Reúnete con un compañero, comparen sus respuestas y comenten posibles razones por las cuales en los EUA se usan unidades de medida diferentes a las del SI.

Glosario

anglosajón. De procedencia y lengua inglesa.

Así como en el sistema internacional los múltiplos y submúltiplos de las unidades básicas están relacionadas por potencias de diez, en las unidades de medida **anglosajonas** también hay algunas relaciones:

- Una yarda es igual a 3 pies.
- Un pie es igual a 12 pulgadas.
- Una libra es igual a 16 onzas.

Usen la información anterior y den respuesta a las siguientes preguntas.

a) ¿Cuál es la unidad de medida que no está relacionada con las otras? ¿A qué creen que se debe?
b) ¿Las unidades de medida anglosajonas están relacionadas por medio de potencias? ¿Por qué?
c) ¿A cuántas pulgadas equivale una yarda?
d) ¿Usando la pulgada como unidad básica se podrá hacer uso de los prefijos para formar sus múltiplos y submúltiplos?, ¿por qué?
e) A partir de la respuesta al inciso anterior ¿será posible usar una recta de prefijos para realizar conversiones entre las unidades del mismo tipo en este sistema? Justifiquen su respuesta.
f) ¿Qué métodos pueden idear para convertir unidades del mismo tipo en este sistema? ¿Son similares a los que usaron con el SI? ¿Por qué?

Comparen sus respuestas con otras parejas y comenten las posibles ventajas que puede tener el sistema tradicional de unidades de medida de EUA.

Ya que prácticamente el mundo entero sigue el Sistema Internacional de Unidades para medir longitudes, masa y capacidad, se han establecido las equivalencias de las unidades del sistema inglés al SI.

Considera la siguiente ficha técnica de un jugador profesional de Asociación Nacional de Basquetbol (NBA, por sus siglas en inglés) y responde lo que se solicita.

Nombre **Jordan E. Oneal**	
Edad **32 años**	Posición **Alero**
Estatura **2.03 m / 6.7 pies (ft)**	Peso **113 kg / 250 libras (lb)**

***a*)** De acuerdo con la información de la ficha, ¿qué magnitud se determina con *pie*? ¿Cuál es el símbolo de pie?
***b*)** ¿Qué magnitud se determina en *libras*? ¿Cuál es el símbolo de libra?
***c*)** ¿A cuántos metros equivale aproximadamente un pie? ¿A cuántos centímetros?
***d*)** ¿Cuál sería la equivalencia aproximada de una libra en kilogramos? ¿Y en gramos?
***e*)** ¿Cuál es tu estatura en pies? ¿Y en yardas?
***f*)** ¿Cuál es tu peso en libras? ¿Y en onzas?

Compara tus respuestas con un compañero y validen los equivalencias aproximadas entre las unidades anglosajonas y las del SI.

En la actividad anterior habrás identificado algunas relaciones entre las unidades anglosajonas de masa y longitud. Antes de precisar las equivalencias exactas, realicen una exploración al respecto.

Glosario

alero. Posición de un jugador de basquetbol que juega en la parte lateral de la cancha y realiza tiros a larga distancia.

Completen los siguientes enunciados con la palabra adecuada *más* o *menos* según sea el caso.

a) Tres pies son un poco ______ de un metro.
b) Una yarda es un poco ______ de un metro.
c) Treinta y seis pulgadas son un poco ______ de un metro.
d) Un pie es un poco ______ de tres decímetros.
e) Un tercio de yarda es un poco ______ de tres decímetros.
f) Una pulgada es un poco ______ de tres centímetros.
g) Media libra es poco ______ de un cuarto de kilogramo.
h) Una libra es un poco ______ de medio kilogramo.
i) Dos libras es un poco ______ de un kilogramo.
j) Dieciséis onzas son un poco ______ de medio kilogramo.

Escriban las relaciones anteriores de forma numérica y simbólica, por ejemplo, 3 ft < 1 m. Pueden usar el símbolo ≈, que indica aproximadamente igual para describir dichas relaciones. Finalmente, determinen el exceso o defecto que se comete en la aproximación en cada caso.

Glosario

redondear. Consiste en aproximar el numero al entero o decimal más cercano. Si la posición siguiente a la que se quiere redondear es menor que 5, la cantidad se conserva igual hasta la posición deseada. Sin embargo, si la posición siguiente a la que se desea redondear es mayor o igual que 5, se debe aumentar una unidad a la última cifra deseada.

Por ejemplo, si 6.847 se redondea a centésimos, queda como 6.85, porque el 7 de los milésimos es mayor que 5. En cambio, si se redondea a décimos, se conserva como 6.8, porque el 4 de los centésimos es menor que 5.

En la siguiente tabla se muestran las unidades mencionadas del sistema inglés con sus equivalencias con el SI.

Magnitud	Sistema inglés	SI
Longitud	1 yarda (yd)	91.44 cm
	1 pie (ft)	30.48 cm
	1 pulgada (in)	2.54 cm
Capacidad	1 galón para líquidos (gal)	3.7854 L
Masa	1 onza (oz)	28.3495 g
	1 libra (lb)	453.5923 g

Usando las equivalencias de la tabla, revisa las respuestas de las actividades anteriores y corrige lo que sea necesario. Además, **redondea** las equivalencias en el SI usando dos cifras decimales, reescribe la tabla en tu cuaderno y resuelve el siguiente problema.

Pedro se encuentra trabajando en un laboratorio. Un día se dedicó a revisar la calidad de un nuevo material que tenía la forma de un cubo de 2.0 cm por lado y con un peso de 534 g. En el informe que debía llenar para quien fabricó el cubo con el nuevo material, tenía que dar las dimensiones en pulgadas y la masa en onzas. Determina las equivalencias que Pedro debe anotar en su informe.

El galón

Es una unidad de medida que se emplea de forma recurrente en Estados Unidos de América o en México para medir volúmenes de líquidos, principalmente la gasolina o pinturas. Antes de 1960, el volumen de un galón dependía de lo que se midiera y en dónde. Sin embargo, en la actualidad el equivalente de un galón en unidades del SI es 1 galón = 3.7854 litros.

Escribe en el recuadro >, < o = según corresponda.

- 2 galones ☐ 7 litros
- 1 galón ☐ 4 litros
- $\frac{1}{2}$ galón ☐ 1.5 litros
- $\frac{1}{4}$ galón ☐ 1 litro

Lean con atención la siguiente situación y den respuesta a lo que se les solicita.

Don Mario fue a cotizar el precio de dos tipos de pintura y dos tipos de impermeabilizante, pues desea proteger su casa durante la temporada de lluvias Las siguientes tablas dan cuenta de los precios de los productos en diferentes presentaciones.

Pintura vinílica tipo A		
Presentación	Capacidad	Precio
Cubeta	19 L	$1 654
Galón		
Litro		

Pintura vinílica tipo B		
Presentación	Capacidad	Precio
Cubeta		
Galón	3.785 L	$265
Litro		

Impermeabilizante 10 años		
Presentación	Capacidad	Precio
Cubeta		
Galón	3.785 L	$299.50

Impermeabilizante 5 años		
Presentación	Capacidad	Precio
Cubeta	19 L	$996
Galón		

a) Completen las tablas a partir de los datos mostrados en cada una. Consideren que los precios y la capacidad guardan una relación de proporcionalidad directa.

b) Si Don Mario compra la cubeta de pintura tipo **B** y la cubeta de impermeabilizante cuya duración es de 10 años, ¿cuánto deberá pagar?

c) Si Don Mario decide comprar dos litros de pintura tipo **A** y un galón de impermeabilizante cuya duración es de 5 años, ¿cuánto deberá pagar?

d) ¿Cuál sería la opción más económica para Don Mario si sólo necesita dos galones de pintura y tres galones de impermeabilizante?

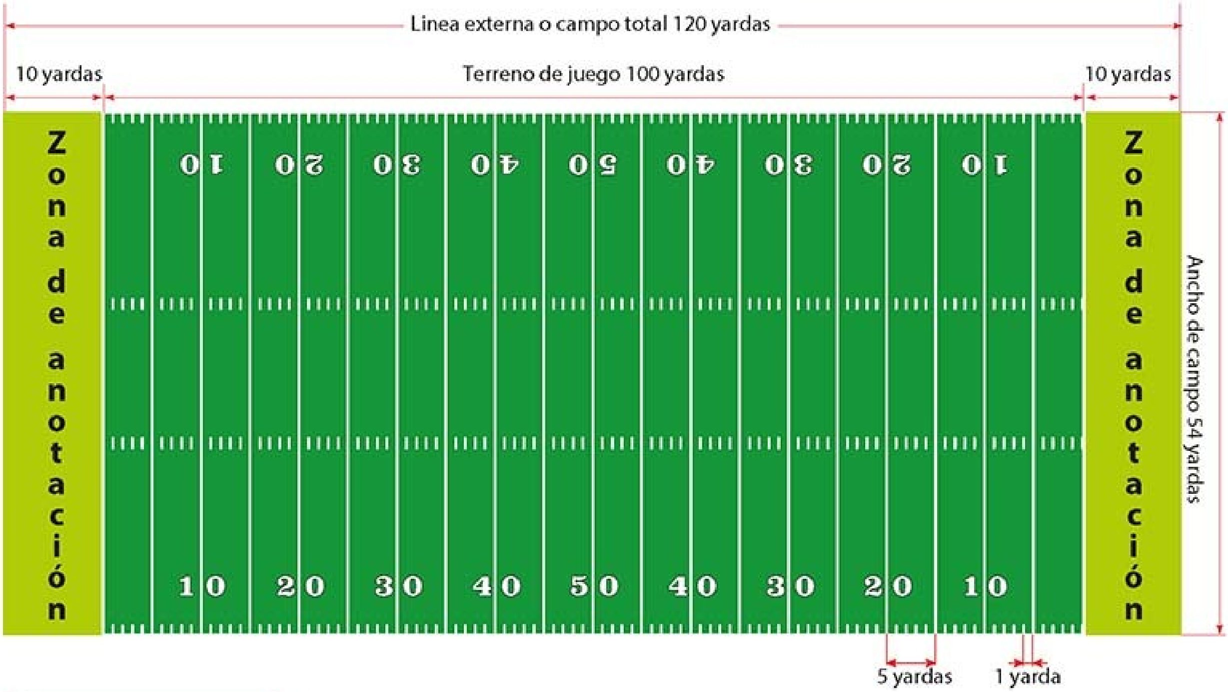
Comparen sus procedimientos con el de otras parejas y comprueben sus resultados. Si sus respuestas no coinciden, verifiquen las conversiones realizadas y las multiplicaciones efectuadas con números decimales. Ajusten los datos del problema y resuelvan otro a modo de práctica.

La yarda

Como muchas de las unidades de medida, la yarda se deriva de la distancia que guardaban entre sí ciertas partes del cuerpo, y correspondía a la distancia que hay entre la punta de la nariz y la punta del dedo medio cuando uno de los brazos está estirado al frente. En la actualidad, su equivalencia en el SI es 1 yarda = 0.9144 m.

Considera la siguiente situación y responde lo que se solicita.

Una empresa desea instalar pasto sintético en un campo de fútbol americano y para ello requiere calcular la superficie en metros cuadrados que debe cubrir el pasto. El esquema del campo de fútbol americano se encuentra a continuación.



Transversalidad

En algunos deportes es común el uso de medidas anglosajonas como la yarda en futbol americano o las libras en el boxeo. En la asignatura de Educación Física conocerás las reglas de éstos y otros deportes.

a) ¿Cuáles son las medidas que deben considerar los encargados del proyecto en la empresa para resolver el problema?

b) ¿Qué conviene más, convertir las yardas a metros y hacer el cálculo de la superficie en metros cuadrados o calcular la superficie del campo en yardas cuadradas y convertir éstas en metros cuadrados? Justifica tu respuesta.

c) Suponiendo que el costo de pasto sintético es de $260 por m^2, ¿cuál sería el costo de cubrir la parte del campo que sólo corresponde al área de juego, es decir, sin considerar las dos zonas de anotación?

Comparen sus respuestas y procedimientos con otras parejas, discutan si hay un método práctico para realizar conversiones entre unidades de superficie y, en su caso, descríbanlo.

πensa

Descubre que tan consolidado está el conocimiento que adquiriste durante esta secuencia, para ello realiza lo que se solicita en cada caso.

a) Completa la siguiente tabla con los datos que se te solicitan. Puedes agregar otras unidades que utilices en tu vida cotidiana y sobre las que desees conocer más. Además, puedes elaborar una línea del tiempo donde muestres los diferentes sistemas que ha usado la humanidad para medir. Comparte tu información con el grupo a través de una exposición o de una presentación, si lo consideras conveniente.

Unidad de medida	Símbolo	Sirve para medir… / Es útil en…	Su origen se remonta a…

b) ¿Cuál es la regla de tres que puedes plantear para convertir 2 345 gramos a onzas?

c) Desde tu punto de vista, ¿por qué es más conveniente el Sistema Internacional de Unidades que el sistema tradicional de medidas de Estados Unidos de América?

d) Redacta y resuelve un problema que implique la conversión de unidades de medida del sistema inglés a unidades del SI. Haz uso de un contexto real para plantear el problema.

De forma grupal, después de validar los resultados de las actividades, determinen aquéllos conocimientos y procedimientos que aprendieron durante esta secuencia y expliquen cómo los utilizan para resolver problemas que involucran la conversión en múltiplos y submúltiplos de unidades de medida del sistema internacional y del sistema inglés.

Enl@ce

Utiliza el conversor de unidades de masa disponible en el siguiente enlace http://recursostic.educacion.es/secundaria/edad/1esobiologia/1quincena1/fconversion/ejemplo2.html?3&1 para practicar o comprobar tus cálculos. Además, puedes utilizar una hoja de cálculo electrónica para diseñar tu propio conversor de unidades de longitud.

Pruébate

Selecciona la respuesta correcta para cada cuestión.

1. Una pesa tiene una masa de 12 libras. ¿Cuál de los siguientes números indica su masa en kilogramos?

   a) 544.31 *b*) 544 *c*) 54.43 *d*) 5443.11

2. Una cinta adhesiva está empaquetada en diferentes presentaciones, según su longitud. ¿Cuál debes comprar, considerando que la razón $\frac{\text{metros}}{\text{peso}}$ debe ser máxima por cuestiones de rendimiento?

   a) Precio: \$8.40 Longitud: 750 dm
   b) Precio: \$8.50 Longitud: 7.6 dam
   c) Precio: \$9.50 Longitud: 75.5 m
   b) Precio: \$8.40 Longitud: 7 520 cm

3. ¿Cuántos metros avanza un jugador profesional de fútbol americano si en una jugada corrió 23 yardas?

   a) Menos de 20 metros
   b) Entre 20 y 21 metros
   c) Entre 21 y 23 metros
   d) Más de 23 metros

4. ¿En cuál de los siguientes enunciados no se puede establecer una comparativa usando unidades de medida?

   a) El limón es más agrio que la toronja
   b) Una bolsa de naranjas pesa más que una bolsa de cacahuates
   c) Un litro de agua ocupa menos espacio que un galón de pintura
   d) Andrea es más alta que Perla

5. ¿Cuántos galones equivalen a la capacidad de los dos botes de pintura que se muestran a continuación?

   a) 4 galones
   b) 5.5 galones
   c) 6 galones
   d) 6.5 galones

Corrijo y aprendo

Para realizar las conversiones debes tener presente las equivalencias básicas. Si al contestar los ejercicios tienes dudas, repasa la información correspondiente de esta secuencia.

Autoevaluación

Completa en este espacio o en tu cuaderno las siguientes oraciones con la finalidad de reflexionar y valorar tu proceso de aprendizaje.

- La secuencia didáctica que más me gustó fue … porque …
- La secuencia didáctica que más se me dificultó fue… porque …
- El tema sobre el que más me gustaría investigar es…
- Entre las muchas cosas que aprendí…
- Participé en las actividades…
- Durante el desarrollo de las actividades me sentí…
- Soy capaz de resolver…

Coevaluación

Intercambia tu libro con un compañero para que de forma crítica y responsable te evalúe.
Marca mediante una ✔ las celdas que señalen el desempeño de tu compañero en cuanto a las **habilidades**, los **valores** y las **actitudes** que muestra durante el trabajo en el aula. Devuelve su libro a tu compañero para que observe su desempeño. Añade una o dos sugerencias constructivas para que pueda mejorar sus puntos débiles.

Piensa de forma crítica	Es honesto	Participa activamente
Piensa de forma creativa	Es responsable	Es innovador
Aprende de forma autónoma	Es perseverante	Escucha con atención
Identifica y resuelve problemas	Es solidario	Busca el diálogo

Heteroevaluación

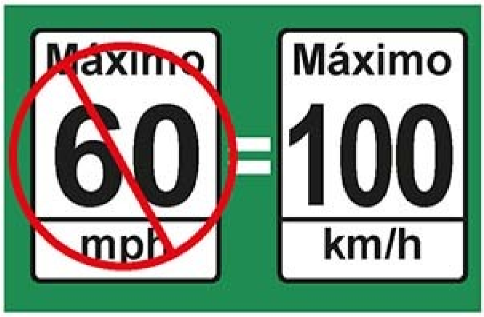
Pide a tu profesor que comparta contigo la respuesta a las siguientes preguntas que te pueden orientar para conducir tu proceso de aprendizaje a un mejor término.

- ¿Cuál sería su valoración del cumplimiento de las metas de aprendizaje a partir de los resultados obtenidos por el estudiante?
- Mencione la secuencia didáctica que el estudiante debe repasar para lograr un mejor entendimiento de la misma.
- Mencione dos aspectos que el estudiante debe mejorar para aprovechar al máximo el tiempo de la clase.

Competencias lectora y matemática

Lee con atención el texto de esta página y responde las preguntas que aparecen en la siguiente.

Pulgadas vs centímetros



Glosario

acre. Medida de superficie del sistema anglosajón equivalente a 4 046 metros cuadrados.

embrollo. Situación confusa.

Según entiendo, ya hubo varios intentos en Estados Unidos por ingresar al sistema métrico decimal. Sólo tres países no utilizan este sistema hoy en día: Birmania, Liberia y Estados Unidos.

Pulgadas, yardas, onzas, millas, galones, **acres**, grados Fahrenheit; eso en cuanto a medidas. Aprender a realizar conversiones entre ellas es un verdadero **embrollo**. El sistema anglosajón es un sistema de medidas en el que 16 onzas equivalen a una libra, 12 pulgadas equivalen a un pie y 3 pies equivalen a una yarda. Para pasarlos a nuestro sistema hay que tener memoria y calculadora. Una pulgada son 2.54 cm, una yarda son 91.44 cm y una milla son 1.61 kilómetros.

Ni hablar de los grados Fahrenheit, cuya fórmula para convertirlos a Celsius no la aprendí nunca. Dice así: puede usar la fórmula $C = 5/9\ (F - 32)$ para convertir grados Fahrenheit a grados Celsius y $9/5\ C = F - 32$ para convertir grados Celsius a grados Fahrenheit.

Adaptado de: Mauricio Pombo, *El tiempo*, disponible en http://www.eltiempo.com/opinion/columnistas/mauricio-pombo/pulgadas-vs-centimetros-171410 (Consulta: 14 de junio de 2018).

1. ¿Cuál es la fórmula correcta que permite convertir °C a °F?

   a) $°F = \frac{9}{5}°C + 32$

   b) $°C = \frac{5}{9}°F - 32$

   c) $°F = \frac{9°C}{5} + 32$

   d) $°C = \frac{9}{5}(°F - 32)$

2. ¿Cuál de las siguientes unidades no mide longitudes?

   a) Pulgada
   b) Milla
   c) Yarda
   d) Acre

3. ¿Qué magnitud indican los señalamientos que se ilustran en el texto?

   a) Distancia
   b) Velocidad
   c) Aceleración
   d) Tiempo

Corrijo y aprendo

Comparen sus respuestas de forma grupal. Si aparecen desacuerdos, lean en voz alta el texto y señalen las partes en las que se encuentra la información que apoya su respuesta. Recuerden mostrar una actitud de respeto para llegar a un acuerdo.

4. ¿A cuánto equivalen 36 pulgadas?

   a) 1 yarda
   b) 10 yardas
   c) 3 pies
   d) 9 pies

5. ¿Qué fue algo que nunca aprendió el autor del texto?

   a) El nombre de los tres países que no han adoptado las unidades de medida del SI
   b) La equivalencia de una pulgada en centímetros
   c) La fórmula para convertir grados Fahrenheit en grados Celsius
   d) La temperatura en grados Fahrenheit a la que se congela el agua

6. En el siguiente espacio, usando el lenguaje matemático, explica a detalle la forma en la que se pueden realizar conversiones entre medidas del sistema anglosajón.

7. Escribe una breve reflexión sobre la postura del autor de la columna que expresa: "Aprender a realizar conversiones (entre medidas del sistema anglosajón) es un verdadero embrollo".

Matemáticas y cultura

Proyecto 2

Presentación

La geometría es una de las ramas más antiguas de las matemáticas y, aunque muchas veces se le reprocha que las formas geométricas que estudia no aparecen en la naturaleza, lo cierto es que la inventiva y creatividad del ser humano ha encontrado la belleza y perfección en los triángulos, cuadrados y otros polígonos.

En este proyecto, descubrirán que el conocimiento matemático, en particular el geométrico, es parte inherente a la cultura de las sociedades desde tiempos **inmemoriales**.

Planeación

Durante esta fase del proyecto, deben establecer los objetivos, los productos, las actividades, los recursos y las formas de evaluación del proyecto.

Algunos temas que pueden interesarles son:

a) Patrones geométricos en las artesanías
b) La geometría en la historia del arte
c) Teselados en la vida cotidiana

En las páginas http://teselaciones.educacia.com/html/definicion.php, http://teselaciones.educacia.com/html/estudio.php# y http://arquimedes.matem.unam.mx/PUEMAC/PUEMAC_2008/teselados/html/index.html encontrarán material básico para generar ideas que les permitan definir el objetivo de su investigación.

Prevean todo el material que necesitarán para documentar y procesar las imágenes e información que encuentren: cámara de video, grabadora de audio, *software* de edición de video, *software* de geometría dinámica, etc.

Utilicen un organizador como el siguiente para regular cada fase del proyecto.

Actividades	Responsables	Recursos y tiempo estimado

Glosario

inmemorial. Se dice de aquello tan antiguo que no se sabe con certeza cuándo comenzó.

Desarrollo

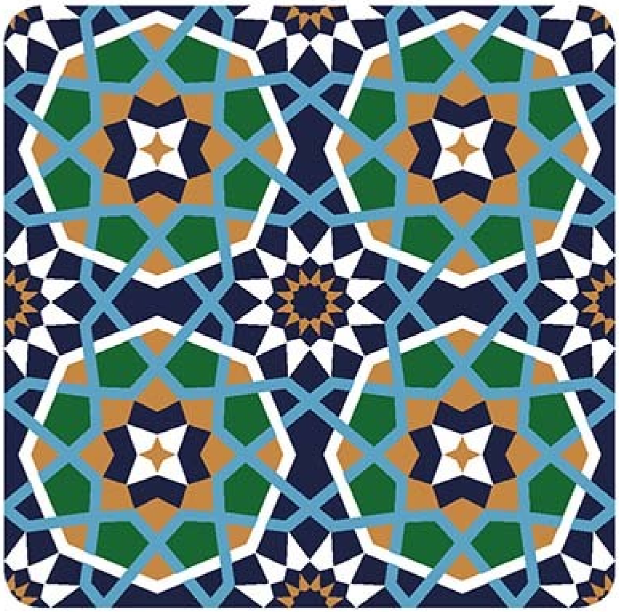
Hay una gran cantidad de actividades de las que pueden extraer información: acudan a museos o galerías de arte, entrevisten a algunos artesanos de la localidad en la que viven, busquen imágenes en Internet, exploren recursos interactivos, analicen diseños textiles, etcétera.

Si disponen de los medios, realicen grabaciones de audio para registrar las entrevistas a los artesanos y documenten en video la elaboración de un textil o alguna otra artesanía.

Visión matemática

¿Consideran que los artesanos tienen en cuenta conceptos geométricos durante su proceso creativo?

Acérquense a uno de ellos para indagar al respecto.



Glosario

logotipo. Es una imagen que distingue a una marca o producto.

Atrévanse a experimentar con los diseños que encuentren; utilicen los conocimientos que adquirieron en este bloque sobre el cálculo del perímetro y área de polígonos regulares y del círculo así como de las relaciones entre los ángulos de los polígonos regulares para crear un **logotipo** o patrón decorativo propio.

Es momento de repasar y valorar la organización y cumplimiento de las actividades que desarrollaron durante todo el proceso. Tomar en cuenta sus fortalezas, debilidades y áreas de oportunidad los preparará para el próximo proyecto.

Evaluación

También consideren que hay diferentes maneras de abordar un proyecto, planteen otras preguntas y alternativas que les gustaría responder o investigar.

Con lo aprendido durante este proyecto pueden, por ejemplo, obtener la descripción detallada del diseño de una de las artesanías que se crean en su localidad y reproducirlo para darlo a conocer mediante redes sociales y generar a largo plazo un impacto económico en la región que habitan. Recuerden respetar en todo momento las ideas creativas de los artesanos de quienes obtengan sus diseños.

Transversalidad

Busquen la orientación del profesor de Formación Cívica y Ética para que, al reproducir y compartir el diseño artesanal, no incurran en violaciones a los derechos de autor.

Organicen y plasmen los resultados de su investigación en un reporte por escrito que deberán entregar a su profesor para su valoración.

Comunicación

Para compartir los resultados de su investigación con la comunidad escolar o entre los habitantes de su localidad, utilicen *software* de geometría dinámica como GeoGebra para imitar o reproducir los patrones geométricos que más hayan llamado su atención. Realicen una presentación pública, exhiban un póster o presenten un documental con los videos que grabaron.

Bloque 3

Eje Forma, espacio y medida

Tema: Magnitudes y medidas

Aprendizajes esperados:

- Calcula el perímetro y el área de polígonos regulares y del círculo a partir de diferentes datos.
- Calcula el volumen de prismas y cilíndros rectos

Eje Análisis de datos

Tema: Estadística

Aprendizajes esperados:

- Recolecta, registra y lee datos en histogramas, polígonos de frecuencia y gráficas de línea.
- Usa e interpreta las medidas de tendencia central (moda, media aritmética y mediana), el rango y la desviación media de un conjunto de datos y decide cuál de ellas conviene más en el análisis de los datos en cuestión.

Tema: Probabilidad

- Determina la probabilidad teórica de un evento en un experimento aleatorio.

Utiliza los contenidos
de este bloque para
implementar un proyecto,
con el que puedes beneficiar
la salud de tu comunidad.

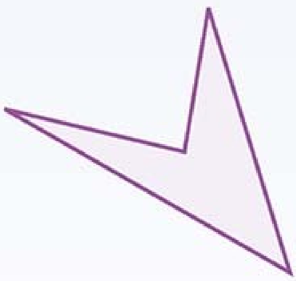
Calcula el perímetro y área de polígonos regulares y del círculo a partir de diferentes datos

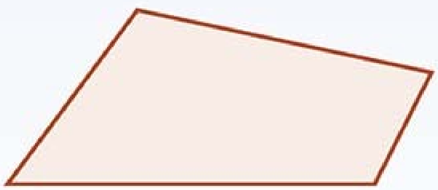
Empieza

Las siguientes actividades propician que rescates lo que ya sabes. Resuélvelas de forma individual y cuando estés seguro de tus respuestas compáralas con las de un compañero. Sólo consulten con el profesor si es necesario.

a) Dibuja en los siguientes espacios dos triángulos diferentes cuyo perímetro sea igual a 9 cm.

b) Calcula el área de los siguientes cuadriláteros. Toma las medidas que consideres necesarias.





c) ¿Cuál es la descripción más adecuada del número π? Subraya la respuesta correcta.

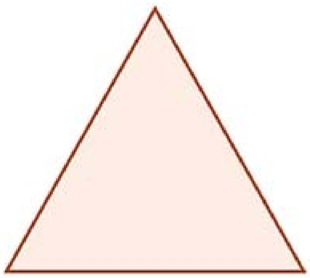
- Es un número igual a 3.1416.
- Es la razón que existe entre el perímetro de un círculo y su diámetro.
- Es la razón que existe entre el radio de un círculo y su diámetro.
- Es un número griego que equivale aproximadamente a 3.14159.

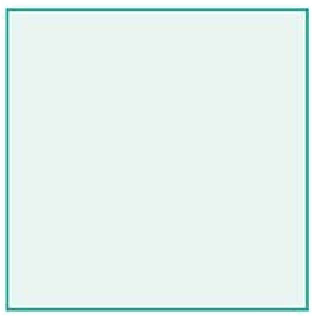
Avanza

El triángulo equilátero y el cuadrado

Dos de las formas geométricas más sencillas y usadas en diferentes contextos, como las artes, el diseño y la publicidad, son el triángulo equilátero y el cuadrado.

Considera las siguientes figuras, utiliza una regla y toma la medida de sus lados, con base en ello contesta las siguientes preguntas.





a) ¿Cuál es el perímetro de las figuras?

b) ¿Cuál es la fórmula que puedes utilizar para calcular el perímetro de estas figuras?

c) ¿En qué tipo de triángulos su perímetro se puede calcular con la fórmula $P = 3l$? Justifica tu respuesta.

d) En tu cuaderno reproduce el cuadrado y sobre uno de sus lados reproduce el triángulo. ¿Qué figura geométrica se forma?

e) ¿Existe alguna fórmula que puedas utilizar para calcular el perímetro de la figura que trazaste en el inciso anterior? Argumenta tu respuesta.

f) Describe como harías una figura de seis lados utilizando el triángulo y el cuadrado, puedes repetir cualquiera de las figuras.

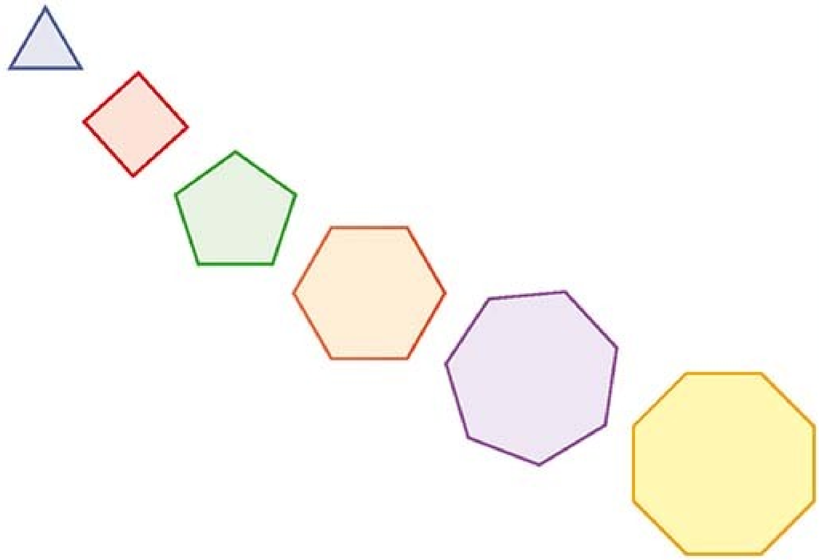
Compara tus respuestas con las de un compañero, valídenlas o corrijan lo que sea necesario.

Visión matemática

No se trata de memorizar las fórmulas para calcular perímetros, pero es necesario partir de algún punto para poder establecer otras fórmulas más elaboradas.

Sucesiones de figuras y perímetros

Consideren la sucesión de figuras que se muestra a continuación y realicen lo que se solicita en cada caso.



Visión matemática

Comparen esta actividad con una similar que realizaron en la secuencia 8. ¿En qué coinciden?

a) En su cuaderno escriban la regularidad que presenta la sucesión.

b) En el siguiente espacio, dibujen los siguientes dos elementos de la sucesión, tomen las medidas necesarias para realizar los trazos.

c) Calculen el perímetro de cada figura en la sucesión, incluyendo el de las dos figuras que recién dibujaron.

d) ¿Qué observan en la sucesión formada por los perímetros de las figuras?

e) ¿Cómo se puede expresar el perímetro de una figura de 15 lados en la que todos sus lados tienen la misma medida? Justifiquen su respuesta.

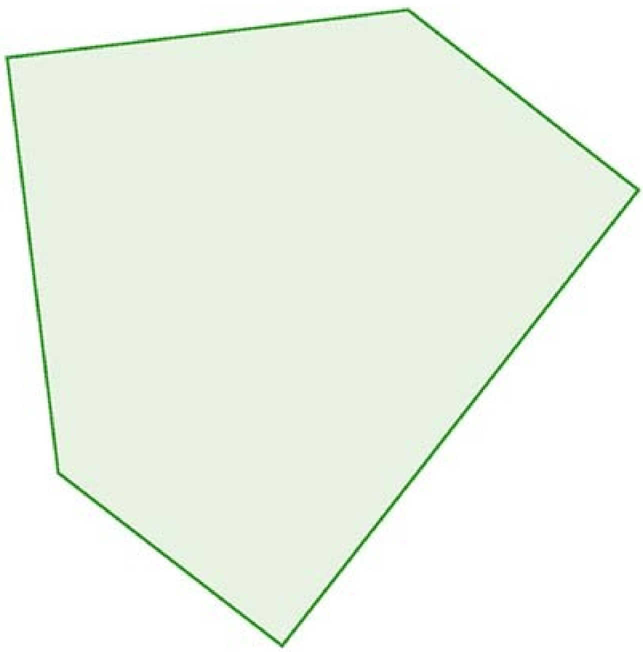
Después de cotejar sus respuestas con otras parejas, en conjunto determinen una fórmula que permita calcular el perímetro de una figura en la que todos sus lados tienen la misma longitud.

El área de polígonos

Ya trabajaste aspectos sobre el perímetro de las figuras geométricas, el siguiente paso es trabajar con su área.

Recuerda que para calcular el área de figuras o superficies irregulares, se puede recurrir a descomponerla en otras más simples cuya área es más fácil de obtener.

Considera el siguiente pentágono irregular. Cópialo en tu cuaderno, realiza los trazos necesarios y responde lo que se pide.



a) Divide el pentágono en tres triángulos. ¿Cómo calculas el área del polígono usando esta descomposición?
b) Ahora divide el pentágono en un triángulo y un rectángulo. ¿Cómo calculas el área del polígono usando esta descomposición?
c) ¿Existe una descomposición del pentágono en la que aparezca un trapecio? En caso afirmativo dibújala en tu cuaderno; en caso contrario argumenta por qué no existe.
d) ¿Es posible descomponer el polígono de tal manera que una de las áreas que se calculen sea la de un cuadrado? Justifica tu respuesta.

Compara las descomposiciones que realizaste del pentágono irregular con las de un compañero, determinen si esto afecta la manera en la que pueden obtener el área del polígono y, finalmente, discutan cuál es la manera más simple en la que pueden descomponer el pentágono para obtener su área.

En concreto

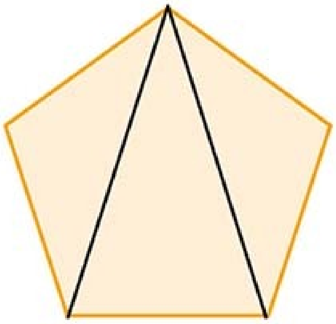
Un polígono regular de tres lados es un triángulo equilátero, mientras que uno de cuatro lados es un cuadrado. Los nombres de los polígonos regulares de cinco o más lados se forman usando prefijos provenientes del latín:

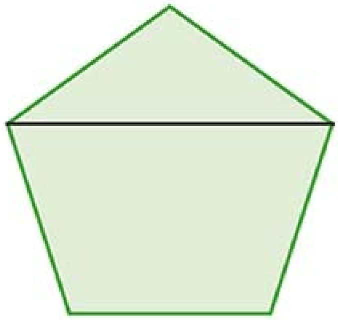
Penta-Cinco
Hexa-Seis
Hepta-Siete
Octa-Ocho
Nona-Nueve
Deca-Diez

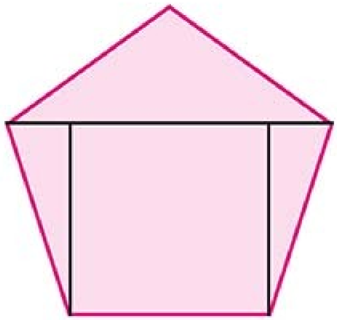
Y añadiendo el sufijo –*gono*, que significa ángulo, seguido de la palabra regular.

Así, un heptágono regular es un polígono de siete lados iguales.

Consideren el mismo polígono descompuesto en tres formas diferentes, tomen las medidas que sean necesarias para realizar cálculos y den respuesta a lo que se solicita a continuación.







Visión matemática

El concepto de triángulos congruentes lo aprendiste el grado anterior, repásalo si lo consideras necesario.

a) ¿El polígono es regular o irregular?

b) ¿Cómo se llaman los segmentos de recta que se utilizaron para realizar la descomposición del pentágono anaranjado?

c) ¿Son congruentes los triángulos de la descomposición en el pentágono anaranjado?, ¿por qué?

d) ¿Qué datos requieres para calcular el valor de las áreas de los triángulos en el pentágono anaranjado?

e) ¿Qué tipo de cuadrilátero forma parte de la descomposición del pentágono verde?, ¿qué datos son necesarios para calcular su área?

f) ¿Qué tipo de triángulo se forma en la descomposición del pentágono verde?, ¿qué datos requieren para poder calcular su área?

g) La descomposición del pentágono rosa es similar a la descomposición del pentágono verde sólo que se añaden dos trazos. ¿Estos trazos facilitan el cálculo de las áreas? Justifiquen su respuesta.

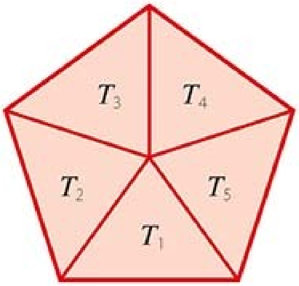
Corrijo y aprendo

Es seguro que aparezcan pequeñas diferencias en los resultados, tal vez por décimas o centésimas, ¿A qué creen que se debe esto?

Calculen el área del pentágono regular en los tres casos usando la descomposición presentada, cotejen la respuesta al comprobar que en los tres casos obtienen respuestas similares, y discutan cualquier diferencia que pudieran encontrar en los resultados.

El área de polígonos regulares

Consideren la descomposición del siguiente pentágono regular.



a) ¿Cuál es la principal diferencia entre esta descomposición y las que observaron en la actividad anterior?

b) ¿Qué tipo de triángulos son T_1, T_2, T_3, T_4 y T_5 de acuerdo con la medida de sus lados?

c) ¿Pueden justificar que los triángulos T_1, T_2, T_3, T_4 y T_5 son congruentes?, ¿qué criterio de congruencia utilizarían? Justifiquen sus respuestas.

d) Reproduzcan en sus cuadernos el triángulo T_1 y marquen con un color su altura con respecto al lado desigual, su base.

e) En la descomposición del pentágono regular, la altura de cualquiera de los triángulos T_1, T_2, T_3, T_4 y T_5 respecto de su lado desigual se llama *apotema*. Si b denota la base de T_1 y a_p denota su altura (apotema), ¿cuál es la fórmula que permite obtener su área?

$$\acute{A}rea_{\ T_1} = \boxed{\qquad\qquad}$$

f) De acuerdo con la respuesta anterior, ¿a qué es igual el área del pentágono regular, considerando que todos los triángulos T_1, T_2, T_3, T_4 y T_5 son congruentes?

$$\acute{A}rea_{\ \text{Pentágono regular}} = \boxed{\qquad\qquad}$$

g) ¿Es posible generalizar el procedimiento para obtener la fórmula del área de cualquier polígono regular?, ¿cómo lo harían?

De forma grupal, validen la siguiente fórmula para calcular el área de un polígono regular:

$$A = \frac{Pa}{2}$$

Donde A = área del polígono regular, P = perímetro del polígono regular y a = apotema. Expliquen por qué en lugar de la medida de la base de los triángulos y el número de ellos, aparece como variable el perímetro del polígono.

En concreto

Los *criterios de congruencia de triángulos* establecen condiciones mínimas para determinar que dos triángulos son congruentes.

Dos triángulos son congruentes si:

LLL

Sus lados correspondientes son congruentes.

LAL

Tienen dos lados correspondientes y el ángulo entre ellos congruentes.

ALA

Tienen dos ángulos correspondientes y el lado entre ellos congruentes.

Aproximación del área de un círculo

Es posible usar el conocimiento anterior para conjeturar el valor del área del círculo.

Visión matemática

¿Recuerdas cómo inscribir un polígono regular en un círculo? Revisa los contenidos de la Secuencia didáctica 9. Deduce y usa las relaciones entre los ángulos de polígonos en la construcción de polígonos regulares.

Biblioteca

En el libro *La doble historia de un vaso de leche* de Menena Cottin descubrirás, con relación a las formas geométricas, que todo depende del ángulo con que se mira.

Consulta otros libros en la biblioteca que te ayuden a apreciar el encanto de la geometría.

Para realizar la siguiente actividad, requieren de su juego de geometría, en particular el compás y la regla.

a) Tracen en su cuaderno un círculo con radio de 10 cm e inscriban en él un triángulo equilátero. Calculen el perímetro y el área del triángulo.
b) En círculos de radio igual a 10 cm, calculen el área y el perímetro de los siguientes polígonos regulares inscritos: cuadrado, pentágono, hexágono, heptágono, octágono, nonágono y decágono. Cada integrante del equipo puede ocuparse de un par de cálculos.
c) Concentren la información obtenida en una tabla como la siguiente. Reprodúzcanla en su cuaderno.

Número de lados del polígono regular	Perímetro (cm)	Área (cm²)
3		
4		
5		
6		
⋮		

d) Consideren los valores de la columna "Perímetro". ¿Cuál es su regularidad?, ¿a qué valor parecen estar aproximándose?
e) Consideren los valores de la columna "Área". ¿Parecen estar aproximándose a un valor?, ¿cuál es?
f) ¿Cuál sería el valor del área de un polígono regular de veinte lados? Hagan una estimación.

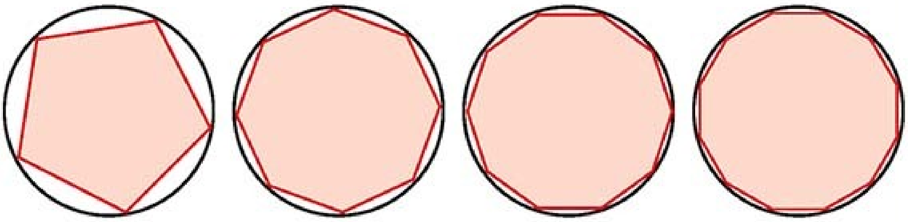
Analicen el procedimiento realizado y aporten ideas sobre por qué este procedimiento permite aproximar el área de un círculo.

Enl@ce

Utiliza el interactivo realizado con el software GeoGebra disponible en el siguiente enlace https://www.geogebra.org/m/d3M2dUNm#material/yXmxZGMC para descubrir de forma visual la relación entre los polígonos regulares inscritos en una circunferencia y el círculo.

La fórmula para calcular el área del círculo

Considera la siguiente sucesión de figuras y, con base en ella, realiza lo que se solicita en cada caso.



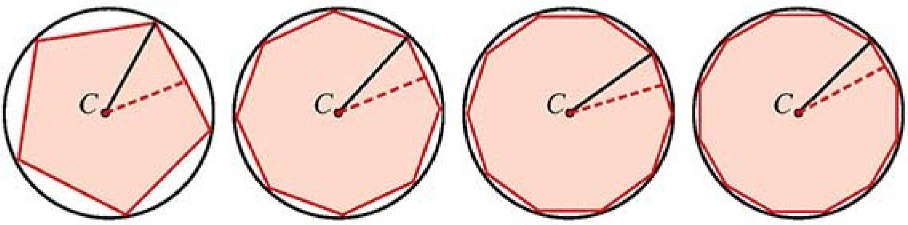
a) Encuentra el centro de cada polígono. Revisa en la página 151 el procedimiento a seguir.

b) Realiza una descomposición de los polígonos en triángulos congruentes usando el centro que recién encontraste en cada uno.

c) Remarca, para cada figura, un radio y la apotema.

d) ¿Qué sucede con el perímetro de los polígonos regulares al aumentar el número de lados del polígono?, ¿a qué longitud se va aproximando?

e) Observa la siguiente imagen y responde: ¿qué sucede con la longitud de la apotema de los polígonos a medida que aumenta el número de lados del polígono?, ¿a qué longitud se va aproximando?



f) ¿Qué sucede con el área de los polígonos regulares al aumentar el número de lados del polígono?, ¿qué superficie va cubriendo?

g) Considera la siguiente afirmación:
"Entre mayor es el número de lados de un polígono regular, su perímetro va aproximándose cada vez más a la longitud de la circunferencia en la que está inscrito, y su apotema se aproxima cada vez más al radio de dicha circunferencia. Por lo tanto, el área de los polígonos se aproxima al área del círculo". Valídala y usa la fórmula $A = \frac{Pa}{2}$, la cual calcula el área de un polígono regular, para justificar que la fórmula $A = \frac{2\pi r \cdot r}{2}$ o $A = \pi r^2$ permite calcular el área del círculo.

Pon a prueba la fórmula $A = \pi r^2$ y calcula el área de dos círculos, uno de radio 5 cm y otro de radio 10 cm.

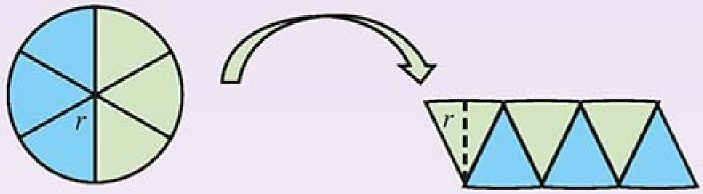
Corrijo y aprendo

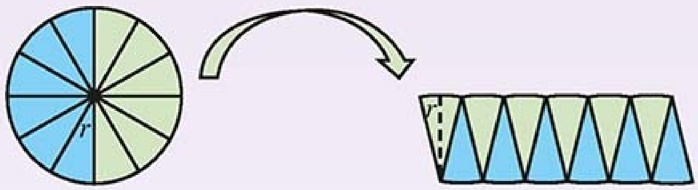
¿Quieres practicar el cálculo de perímetros y áreas de figuras geométricas?
Pon a prueba tus conocimientos, accede al siguiente enlace https://www.thatquiz.org/es-4/matematicas/geometria/ y realiza el test. En la parte superior izquierda con la lista desplegable "Largo" puedes modificar la cantidad de ejercicios. Selecciona el nivel de dificultad de 3 a 100 y establece un tiempo límite para responder de hasta 30 minutos.
Marca las casillas de las figuras según quieras calcular su área o perímetro. También puedes seleccionar el botón de la opción "Comparar" para comparar esas magnitudes entre dos figuras.
Al final, se presenta tu resultado. Corrige las respuestas incorrectas en tu cuaderno.

πensa

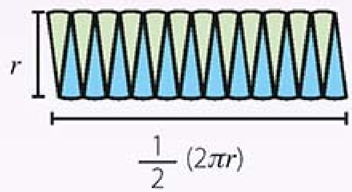
Para concluir y reforzar el conocimiento que lograste en esta secuencia, realiza en tu cuaderno las siguientes actividades.

a) Observa con atención las siguientes ilustraciones. En el recuadro ilustra el proceso que corresponde cuando el círculo se divide en 18 partes iguales.





Justifica que, si el proceso continúa, se puede obtener con mucha aproximación un rectángulo de base igual a la mitad de la longitud de la circunferencia, y altura igual al radio de la circunferencia, como el que se muestra a continuación:



b) A partir de lo anterior y usando la fórmula para calcular el área de un rectángulo $A = bh$, donde A = área, b = base y h = altura, determina el área de un círculo de radio r. Verifica que es la misma que se obtuvo con anterioridad.

c) Determina cuál de las siguientes figuras tiene mayor área: un círculo de 2.5 cm o un pentágono regular cuyo lado mide 3 cm.

De manera grupal, compartan cuáles fueron, desde su punto de vista, los aspectos más interesantes de las actividades que realizaron durante esta secuencia. Reflexionen sobre los aprendizajes que lograron.

Pruébate

Selecciona la respuesta correcta para cada pregunta.

1. ¿Cuál es el perímetro de un pentágono regular cuyo lado es de 2.8 cm?

   ***a*)** 7 cm
   ***b*)** 14 cm
   ***c*)** 35 cm
   ***d*)** 140 cm

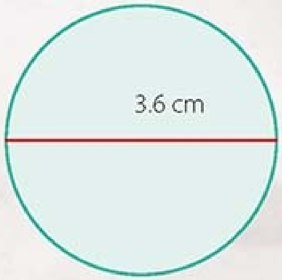
2. ¿Cuál es el la medida del lado de un polígono regular de 18 lados si se sabe que su perímetro es de 108 cm?

   ***a*)** 3 cm
   ***b*)** 6 cm
   ***c*)** 9 cm
   ***d*)** 10 cm

Corrijo y aprendo

Identifica la causa de los fallos al realizar esta evaluación.

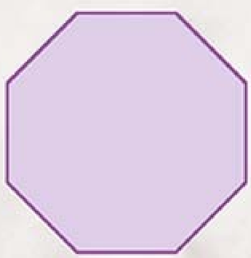
3. ¿Cuál es el área aproximada del círculo que se muestra a continuación?



   ***a*)** 7.2 cm^2
   ***b*)** 10.18 cm^2
   ***c*)** 11.31 cm^2
   ***d*)** 40.71 cm^2

4. ¿Qué datos son necesarios para calcular el área del siguiente polígono regular?

   ***a*)** El perímetro
   ***b*)** El perímetro y la medida de uno de sus lados
   ***c*)** La medida de uno de sus lados y el valor del apotema
   ***d*)** El centro del polígono

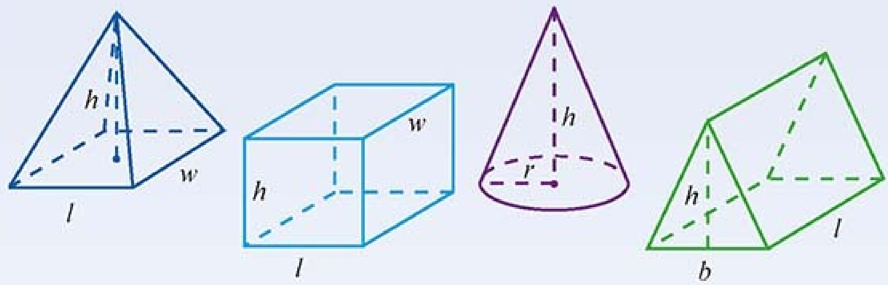


Calcula el volumen de prismas y cilindros rectos

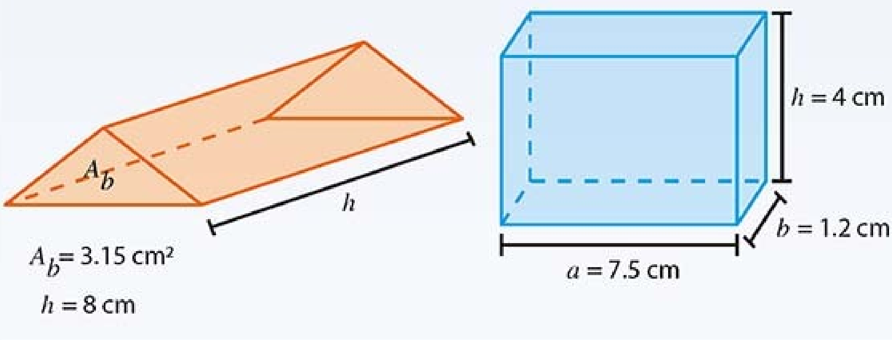
Empieza

Realiza de forma individual lo que se solicita en cada caso para que te percates de lo que ya sabes. Después, comparte y compara tus respuestas con las de un compañero. El profesor puede aclarar alguna duda en caso de ser necesario.

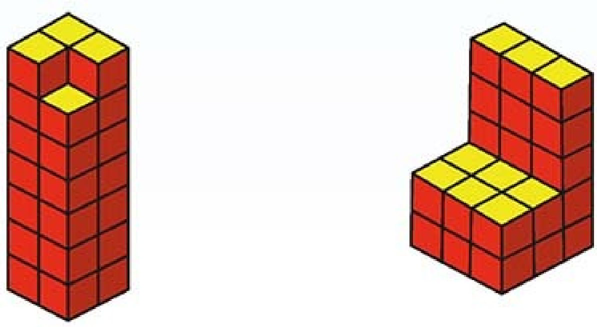
a) Observa la siguiente imagen. Señala con un ✘ los prismas rectos cuya base es un triángulo o un cuadrilátero.



b) Utiliza la fórmula $V = A_bh$, donde V = volumen, A_b = área de la base y h = altura, para calcular el volumen de los siguientes cuerpos.



c) Calcula el volumen de los siguientes arreglos y determina cuál de ellos es mayor.

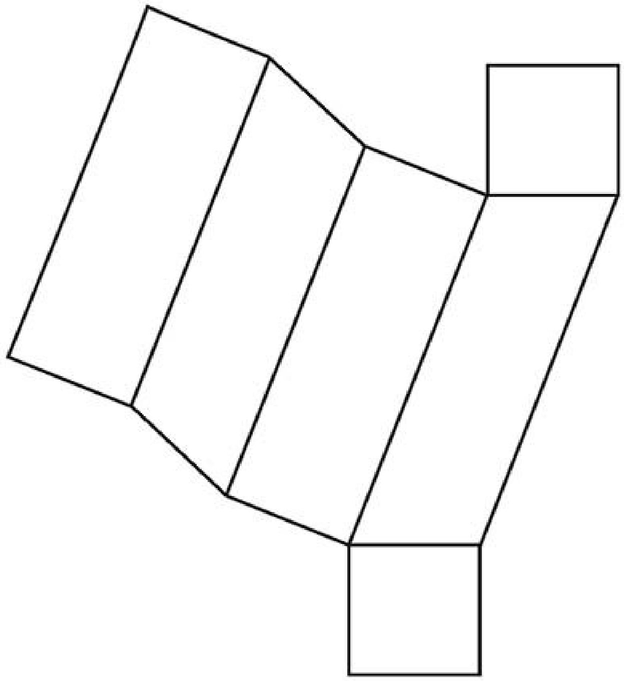


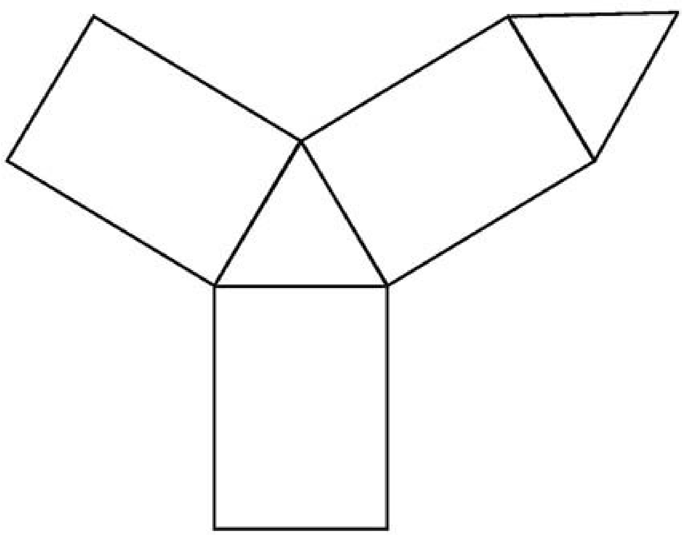
Avanza

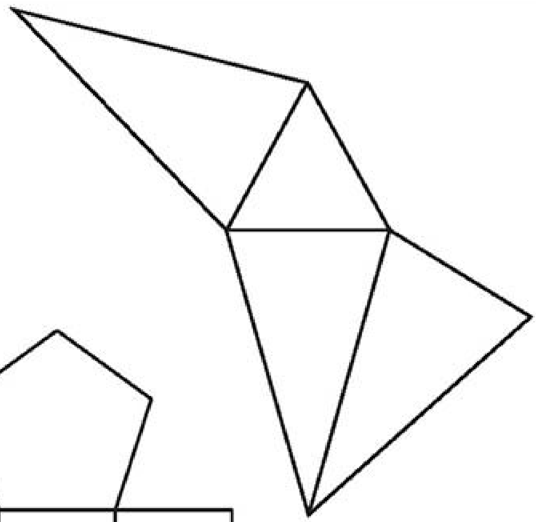
Desarrollos planos

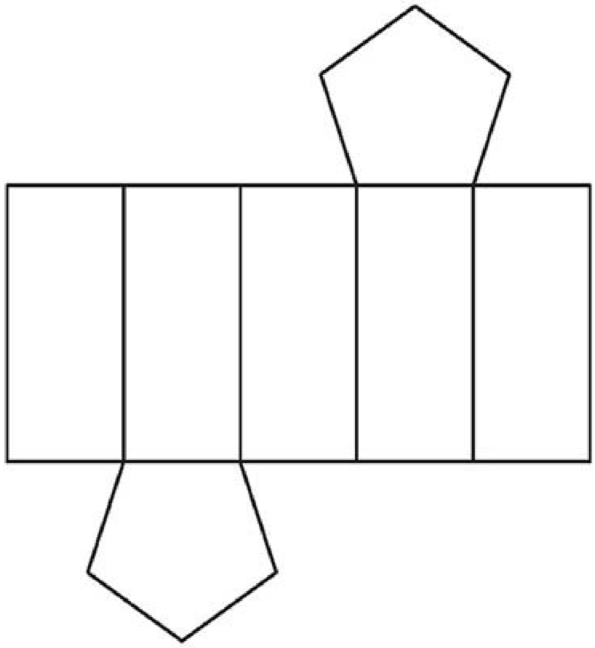
Es un poco limitante representar objetos tridimensionales en una superficie como la hoja de este libro, por lo cual, en la siguiente actividad aprenderás a construir prismas a partir de sus representaciones planas.

Para realizar la siguiente actividad, requieren el siguiente material: hojas de reúso, colores, tijeras, pegamento o cinta adhesiva. Observen con atención los desarrollos planos que se muestran a continuación y respondan lo que se solicita.









a) ¿Cómo identifican las bases de los cuerpos geométricos anteriores? Usen un color azul para identificar las bases en cada desarrollo.
b) ¿Cómo identifican las caras laterales de los cuerpos geométricos anteriores? Usen un color rojo para identificar las caras laterales en cada desarrollo.
c) ¿Cuál es el desarrollo plano que corresponde a un prisma triangular?, ¿cómo lo supieron?
d) ¿Cuántas caras laterales debe tener un prisma pentagonal?, ¿por qué?
e) ¿Cuántas bases tiene un prisma cuadrangular? Justifiquen su respuesta.
f) Hagan una lista de todas aquellas características que incumple el desarrollo plano que no corresponde al de un prisma.

Visión matemática

Utilicen su conocimiento sobre las escalas si desean aumentar el tamaño de los prismas.

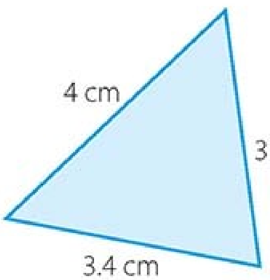
Reproduzcan los moldes anteriores en las hojas de reúso, agreguen las pestañas que sean convenientes y, una vez armados los cuerpos, distingan entre los prismas rectos y los prismas oblicuos. Escriban entre todos una definición para cada uno.

El volumen de los prismas rectos

A continuación conoce otra forma de construir prismas y acércate a conocer aspectos sobre su volumen.

Para realizar la siguiente actividad, necesitan un material grueso como cartón, cartoncillo o corcho, de preferencia reciclado, así como una regla, tijeras y un marcador.

Con el material elaboren veinte copias del triángulo que se muestra, respetando las medidas indicadas y realicen lo que se solicita en cada caso.



Visión matemática

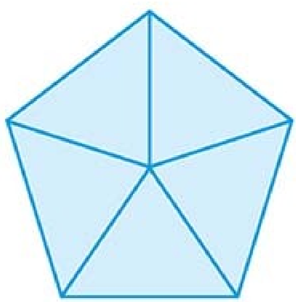
¿Qué tipo de triángulo es?, ¿cómo se utiliza el juego de geometría para trazar un triángulo congruente a éste?

a) Cada una de las veinte figuras tiene un volumen. Calcúlenlo usando la fórmula $V = A_b h$, donde V = volumen, A_b = área de la base y h = altura.

b) Ahora apilen las veinte piezas, una sobre otra, y respondan: ¿qué cuerpo geométrico se forma?

c) Calculen de dos maneras distintas el volumen del cuerpo geométrico resultante en el inciso anterior: con un procedimiento personal y empleando la fórmula $V = A_b h$.

d) A continuación, dispongan cinco de las piezas de tal manera que se forme un pentágono como el que se muestra a continuación:



Respondan: ¿cuál es su volumen?

e) Apilen las piezas restantes de tal manera que se forme un nuevo prisma pentagonal; calculen su volumen a partir del volumen de los prismas triangulares que lo forman.

f) ¿Cómo generalizarían el procedimiento anterior para obtener el volumen de un prisma hexagonal regular si conocen las medidas de la base?

Comparen sus respuestas con las de otras parejas, y reflexionen sobre por qué pueden aparecer diferencias en los resultados de los volúmenes de los prismas, aunque la base de todos ellos tenga las mismas medidas. De forma grupal, determinen que la fórmula que pueden emplear para calcular el volumen de cualquier prisma recto cuya base es un polígono regular, si conocen el área de la base, es:

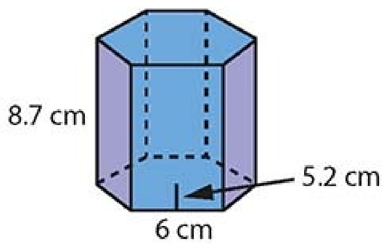
$$V = A_b h$$

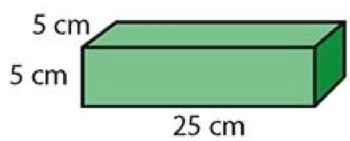
Donde V = volumen, A_b = área de la base y h = altura.

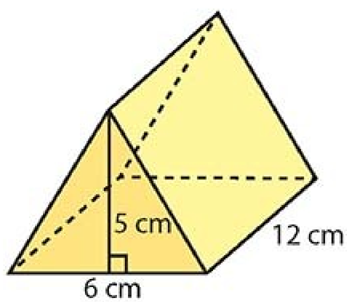
Corrijo y aprendo

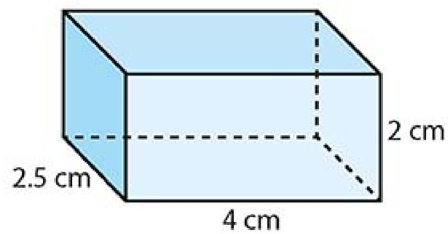
Si no identifican de forma correcta los elementos de un prisma, las fórmulas no funcionarán para calcular su volumen. Antes de sustituir, asegúrense de saber qué valor corresponde a cada literal.

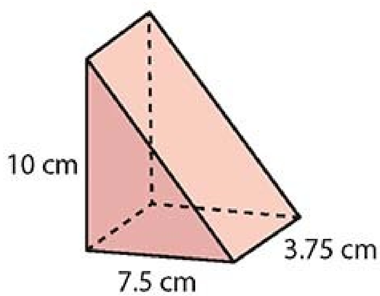
Utilicen la fórmula $V = A_b h$ para calcular el volumen de los siguientes cuerpos geométricos.

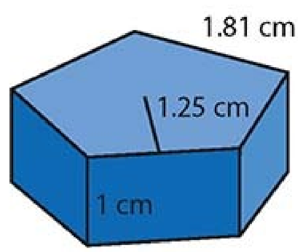












Comparen sus resultados, determinen si utilizaron de forma adecuada la fórmula, y concluyan sobre los ajustes que es necesario introducir en la fórmula para cada tipo de prisma, dependiendo del área de la base.

Las fórmulas del volumen y despejes

Observen y analicen con atención las siguientes fórmulas; después, respondan las preguntas.

$$V = A_b h \qquad V = \frac{Pah}{2}$$

$$V = 3lah \qquad V = \frac{7lah}{2}$$

a) Expliquen qué representa cada literal en las fórmulas. Por ejemplo, en la fórmula $V = A_b h$, A_b representa el área de la base.
b) ¿Cuáles de las fórmulas para calcular el volumen de un prisma requieren como dato la apotema del polígono regular?
c) ¿Qué fórmula emplearían para calcular el volumen de un prisma heptagonal? Justifiquen su elección.
d) ¿Cuál de las fórmulas serviría para calcular el volumen de un prisma hexagonal?, ¿por qué?
e) ¿En cuál de las fórmulas es necesario conocer el perímetro de la base? Justifiquen su respuesta.
f) Si tienen como datos el área de la base y la altura del prisma, ¿qué fórmula emplean para calcular su volumen?, ¿por qué?

Comparen sus respuestas y, mediante el pensamiento algebraico y geométrico, traten de darle sentido a cada una de las fórmulas que aparecen. Una vez que hayan logrado entender en qué casos es conveniente usar una u otra fórmula, realicen los despejes de cada una de las variables A_b, h, P, a, y l y escríbanlos en un formulario. El formulario es exclusivo para que entre todos cotejen que los despejes se hagan de forma correcta y no pretende ser un recurso que deben aprender de memoria.

Corrijo y aprendo

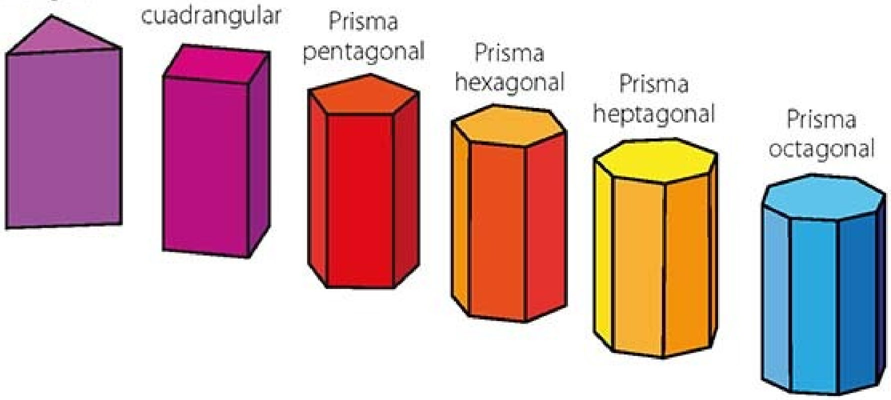
Despejar una literal o variable de una fórmula es un tema que causa dificultades. Te puede ser de utilidad revisar lo referente al lenguaje algebraico y la solución de ecuaciones para que fortalezcas el procedimiento de los despejes.

En cada caso, determina cuáles datos son conocidos y cuál es la incógnita. Propón la fórmula más adecuada para poder realizar los despejes necesarios y resolver el problema.

- Determina el volumen de un cubo en el que el perímetro de una cara es 36 cm.
- Calcula la altura de un prisma pentagonal dado que el perímetro del pentágono de base es de 12 cm, su apotema mide 1.64 cm y el volumen del cuerpo geométrico es de 60 cm^3.
- Determina el ancho de un paralelepípedo cuyo largo es de 6 cm, cuyo alto es de 4 cm y tiene un volumen de 180 cm^3.
- ¿Cuál es él área de la base de un prisma triangular dado que su altura es de 5 cm y su volumen de 120 cm^3?

Revisa tus respuestas con un compañero y corrijan lo que sea necesario.

Un prisma poligonal muy especial



Visión matemática

En la secuencia anterior relacionaste el área del círculo con las áreas de polígonos inscritos en su circunferencia. ¿Cuál crees que es la relación entre ese procedimiento y el que se presenta en esta actividad?

Consideren la sucesión de prismas anteriores y realicen lo que se solicita en cada caso.

a) ¿Cuál de los prismas presentados posee mayor volumen?, ¿por qué?

b) Dibujen en su cuaderno, de forma aproximada, los siguientes dos elementos de la sucesión.

c) ¿Qué longitud de las caras laterales se modifica a medida que se incrementa el número de lados del polígono de la base?, ¿por qué?

d) ¿Qué aspecto tendría un prisma cuya base es un polígono regular de más de cien lados? Intenten dibujarlo a continuación.

e) ¿A qué cuerpo geométrico se aproxima el dibujo? ¿Les resulta familiar? Justifiquen sus respuestas.

f) ¿Cómo calcularían el volumen del prisma que acaban de dibujar? Expliquen su respuesta.

g) ¿Podrían aplicar la fórmula $V = A_b h$ para calcular el volumen del cuerpo geométrico que dibujaron?, ¿qué aspecto o variables de la fórmula deberían adecuarse? Justifiquen sus respuestas.

Comparen sus dibujos y respuestas con otras parejas. En conjunto, hagan explícita la fórmula para calcular el volumen del cuerpo que resulta al considerar un prisma cuya base es un polígono regular de un número infinito de lados, pues la aplicarán en la siguiente actividad.

La forma de objetos cotidianos

Observen con atención las siguientes imágenes y respondan lo que se solicita.









a) ¿Qué tienen en común todos estos objetos?

b) ¿Todos estos objetos tienen un volumen? Justifiquen su respuesta.

c) ¿En cuáles de ellos podrías obtener el volumen exacto?, ¿en cuáles sólo una aproximación? Justifiquen sus respuestas.

d) En los casos en los que sea posible ¿qué medidas requieren conocer para calcular el volumen exacto?

e) Dibujen otros tres objetos que tengan una forma similar a la de éstos. Luego, calculen su volumen mediante la fórmula $A = \pi r^2 h$, donde r es el radio y h es la altura. Las medidas las pueden aproximar o investigar; por ejemplo, un bidón metálico como el de la ilustración de la esquina superior izquierda tiene medidas $r = 23.5$ cm y $h = 78$ cm.

De forma grupal, comenten la importancia de esta forma geométrica en la vida cotidiana. Investiguen el porqué muchos objetos tienen esta forma y divulguen el resultado de su investigación con la comunidad escolar a través de un periódico mural o folletos.

Enl@ce

Revisa el ejemplo resuelto sobre el cálculo del volumen de un prisma hexagonal disponible en el siguiente enlace **https://www.geogebra.org/m/tf2lohN0#material/QJ7xrwkf** Utiliza los botones y para rotar el prisma en vista 3D y visualizarlo desde cualquier ángulo. Dibuja en tu cuaderno el prisma en la posición que más te llame la atención y copia el ejemplo, asegurándote de verificar todos los cálculos.

Visión matemática

Miren a su alrededor, ¿hay algún objeto con forma similar a éstos?

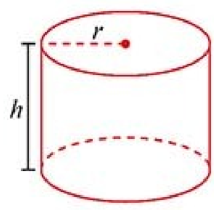
En concreto

Al calcular el área del círculo pudiste apreciar que es posible considerar esa figura como el caso de un polígono regular cuyo número de lados aumenta de manera indefinida.

Lo mismo puede razonarse en relación con el cilindro, pues es posible verlo como el caso de un prisma recto que tiene como base un polígono regular y cuyo número de lados aumenta de manera indefinida.

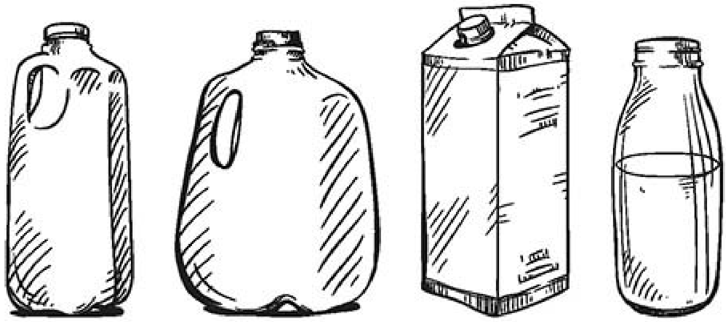
Se puede utilizar la fórmula $V = A_b h$ para calcular el volumen de un cilindro. Sólo basta observar que el área de la base en un cilindro es igual al área de un círculo de radio r, es decir, es igual a πr^2.

La fórmula que permite calcular el volumen de un cilindro de radio r y altura h es $V = \pi r^2 h$.



El litro y el metro cúbico

El litro es una unidad de capacidad, es decir, sirve para medir el contenido que puede encerrar un recipiente. Pero de acuerdo con el SI, la unidad para medir volúmenes o capacidades debe ser el metro cúbico (m^3). Cabe aclarar que un metro cúbico es el volumen de un cubo cuyos lados miden 1 metro. Es bastante común usar los litros en lugar de metros cúbicos cuando se hace referencia al llenado de recipientes con líquidos, como en los envases de jugo, los cartones de leche, tanques de gasolina u otras sustancias usadas en la industria química.



Completa la siguiente tabla con los múltiplos y submúltiplos más comunes del litro.

	Unidad de medida	Símbolo	Equivalencia en litros	En notación científica
Múltiplos	megalitro	ML	1 000 000	1×10^6
Unidad básica	litro	L	1	1×10^0
Submúltiplos				

Visión matemática

¿Recuerdas cómo completar la tabla? Revisa la Secuencia didáctica 10. Resuelve problemas que implican conversiones en múltiplos y submúltiplos del metro, litro, kilogramo y de unidades del sistema inglés (yarda, pulgada, galón, onza y libra).

Junto con un compañero, escriban dos ejemplos de la vida cotidiana donde se utilicen múltiplos del litro y dos ejemplos donde se haga uso de los submúltiplos del litro. Si es posible, ilustren dichos ejemplos.

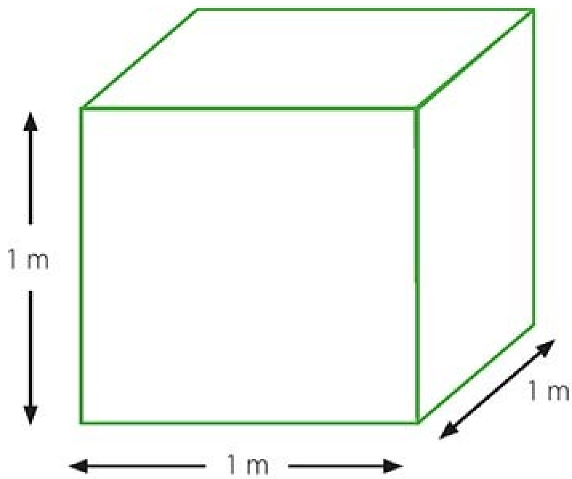
Utiliza la tabla de submúltiplos y múltiplos del litro de la página anterior y los métodos que aprendiste en la secuencia didáctica 10 para realizar las siguientes conversiones:

- 4 300 mL a L
- 32.25 L a hL
- 850 cL a L
- 203.6 mL a dL
- 98 250 L a kL

Compara tus respuestas con las de un compañero. De ser necesario, repasa lo referente a la conversión entre unidades.

Contesten lo que se solicita a continuación.

***a*)** Consideren la siguiente imagen y respondan: ¿cuántos cubos de 1 dm por lado le caben a lo largo, a lo ancho y a lo alto?



***b*)** A partir del inciso anterior, escriban la equivalencia correspondiente 1 m^3 = ______ dm^3.

***c*)** Repitan lo hecho en el inciso anterior pero esta vez consideren cubitos de 1 cm por lado. Escriban la equivalencia correspondiente 1 m^3 = ______ cm^3.

***d*)** Ahora escriban la siguiente equivalencia 1 m^3 = ______ mm^3.

***e*)** Si se sabe que un litro es igual a la milésima parte de un metro cúbico, ¿qué equivalencia es adecuada para representar esta información?, ¿por qué?

Comparen sus respuestas con otras parejas y validen la equivalencia adecuada entre litros y metros cúbicos.

Visión matemática

Piensen en cómo pueden usar la imagen para responder.

Determinen para cada elemento qué unidad de medida (litro o metro cúbico) es más conveniente para indicar su capacidad o volumen. Además, deben investigar el dato aproximado de la capacidad o volumen en cada caso.

Alberca olímpica

Cubeta

Madera en un bosque

Palacio de Bellas Artes

Garrafón de agua

Cilíndro de gas

De común acuerdo, deben idear la forma de presentar los resultados a los habitantes de su comunidad de tal manera que puedan entender o darse una idea de qué tan grande es una alberca olímpica o qué tanta leña se puede obtener del bosque de la comunidad. Por ejemplo, ¿con cuántos garrafones se llena la alberca olímpica?

Visión matemática

Pueden utilizar el conocimiento que tienen sobre proporcionalidad para llevar a cabo esta actividad.

En concreto

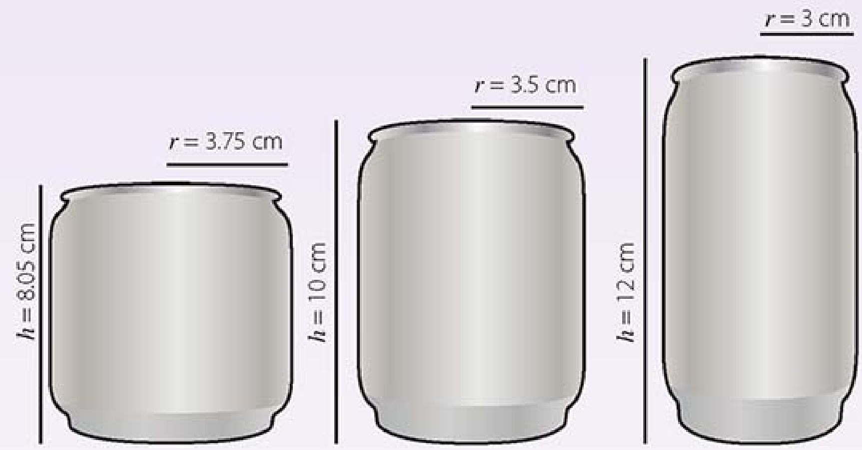
1 m^3 = 1 000 litros

πensa

Valora qué tantos conocimientos lograste durante esta secuencia, para ello realiza lo que se indica en cada caso. Usa tu cuaderno para justificar respuestas o desarrollar cálculos.

a) Traza en tu cuaderno el desarrollo plano de un prisma pentagonal de altura 8 cm cuya base tiene un perímetro de 12.5 cm, de tal manera que al armarlo su volumen sea igual a 86 cm³.

b) Una empresa productora de bebidas refrescantes requiere envasar 355 ml de su producto más vendido en una lata. ¿Cuál de las siguientes resulta adecuada para dicho propósito? Escribe el procedimiento y las operaciones en tu cuaderno.



c) Determina cuáles de las siguientes oraciones son correctas y márcalas con una ✔ en el lado derecho.

- El volumen de un prisma pentagonal regular se puede calcular con la fórmula $V = \frac{5lah}{2}$. ☐
- El volumen de un cilindro se calcula con la fórmula $V = \pi^2 h$. ☐
- El volumen de un prisma hexagonal en el que el área de la base es de 64.95 cm² y que tiene una altura 10 cm es 649.5 cm³. ☐
- Un cilindro es un prisma cuya base es un círculo. ☐

En plenaria validen las respuestas a las actividades. Si es necesario, discutan las dudas más comunes que surgieron durante esta secuencia para tratar de resolverlas.

Corrijo y aprendo

Realiza una prueba de conocimientos en la siguiente dirección https://www.thatquiz.org/es-3/matematicas/fraccion/

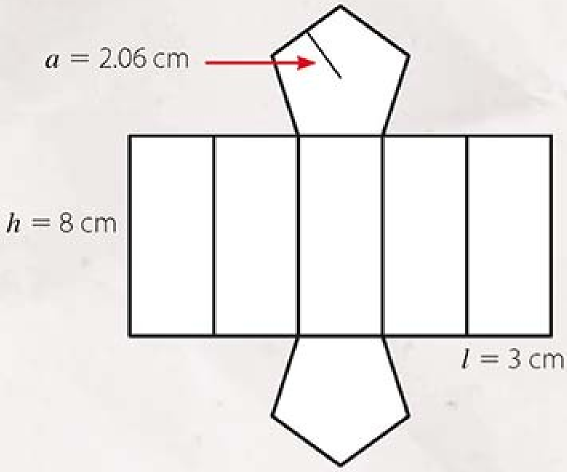
En la parte superior izquierda con la lista desplegable "Largo" puedes modificar la cantidad de ejercicios. Selecciona el nivel de dificultad de 3 a 100 y establece un tiempo límite para responder de hasta 30 minutos. Marca las casillas correspondientes a "Cubo", "Prisma" y "Cilindro" y elige el botón de la opción "Resolver".

Puedes observar tu desempeño en la parte superior derecha de la pantalla. Corrige los fallos en tu cuaderno.

Pruébate

Selecciona la respuesta correcta para cada pregunta.

1. ¿Cuál es el volumen del cuerpo que resulta al armar el desarrollo plano que se muestra a continuación?



Corrijo y aprendo

Evalúa tu progreso reflexionando, ¿en qué lo hiciste bien? ¿En qué podrías mejorar?

a) 24.72 cm^3 **c)** 98.88 cm^3

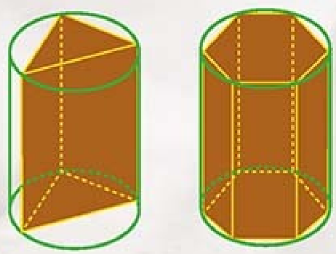
b) 49.44 cm^3 **d)** 123.6 cm^3

2. El volumen de un cubo de 3.5 cm de lado se obtiene mediante la expresión:

a) $V = 3 \times 3.5\ \text{cm}^3$ **c)** $V = \sqrt{3.5\ \text{cm}^3}$

b) $V = 3 \times 3 \times 3.5\ \text{cm}^3$ **d)** $V = (3.5\ \text{cm})^3$

3. ¿Cuál de las relaciones es correcta con referencia a los volúmenes que se observan en la siguiente ilustración?



a) El volumen del prisma triangular es menor que el del cilindro pero mayor que el del prisma hexagonal
b) El volumen del cilindro es menor que el volumen del prisma hexagonal
c) El volumen del prisma triangular es exactamente la mitad del volumen del prisma hexagonal
d) El volumen del prisma triangular es menor que el del cilindro y menor que el del prisma hexagonal

Recolecta, registra y lee datos en histogramas, polígonos de frecuencia y gráficas de línea

Empieza

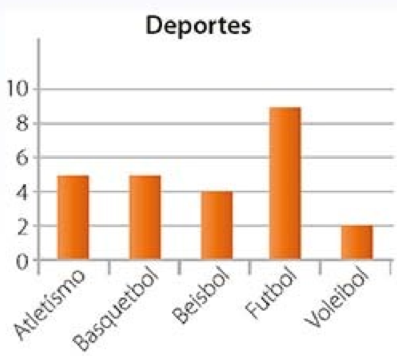
¿Qué tanto sabes del tema de esta secuencia? Da respuesta a los siguientes planteamientos para que lo averigües. Asegúrate de poder respaldar tus respuestas con argumentos convincentes y exponlos frente a un compañero.

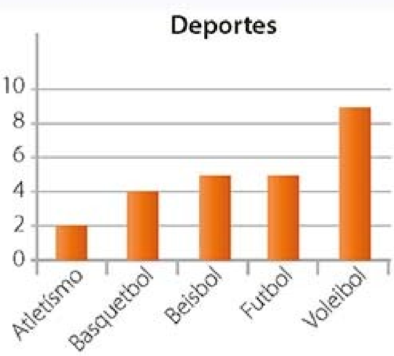
a) Dibuja en tu cuaderno la gráfica circular que corresponde a la siguiente tabla de frecuencias.

Escolaridad	Frecuencia
Primaria o menos	160
Secundaria	210
Bachillerato	135
Universidad o posgrado	70
No respondió	25

b) ¿Cuál de las siguientes gráficas presenta de forma correcta la información registrada en la siguiente tabla?

Futbol	Basquetbol	Futbol	Atletismo	Beisbol
Atletismo	Voleibol	Futbol	Futbol	Basquetbol
Beisbol	Futbol	Futbol	Basquetbol	Beisbol
Atletismo	Futbol	Voleibol	Atletismo	Basquetbol
Futbol	Basquetbol	Beisbol	Atletismo	Futbol





Avanza

Tipos de datos: cualitativos y cuantitativos

Es seguro que en grados anteriores recolectaste datos para conocer más sobre algún asunto de tu interés y para ello tal vez realizaste experimentos o hiciste encuestas. Una vez recolectados los datos, los analizaste, interpretaste y los presentaste de forma atractiva.

En general, para realizar un adecuado procesamiento de los datos se requiere conocer qué tipos de datos son los que se deben recabar.

Los datos cualitativos se refieren a propiedades, cualidades o categorías de lo que se investiga o estudia. Por ejemplo, el color favorito de una persona (azul, morado, anaranjado, rojo, etc.) o la talla de ropa (chica, mediana, grande, extragrande). En cambio, los datos cuantitativos son aquellos que pueden interpretarse con base en un número, por lo que generalmente miden o calculan algo del estudio en cuestión, aunque no necesariamente deben estar sujetos a las operaciones de la aritmética. Por ejemplo, el número de hijos en un matrimonio (0, 1, 2, 3,…), la estatura de las personas (1.68 m, 1.52 m, 1.48 m,…) o los números de los códigos de barras en los productos comerciales (0123456789, 0022446688, 0102030405,…).

En la siguiente tabla, clasifica los datos en cualitativos o cuantitativos y explica cuáles valores pueden tomar según sea el caso.

Dato	Tipo de dato	Valores posibles
Estado civil		
Sexo		
Lengua materna		
Peso		
Libros leídos el último mes		
Horas que practica ejercicio		
Sueldo de un trabajador		
Dinero gastado en transporte durante un día		
Horas al día dedicadas al estudio		
Tiempo navegando en Internet		

Validen sus respuestas en parejas y proporcionen otros ejemplos de datos. Agreguen en su cuaderno más filas de la tabla.

Más datos

Analicen los siguientes arreglos y respondan lo que se solicita.

Cualitativos	
Nominales	**Ordinales**
• Estado civil (Soltero, Casado, Viudo, Divorciado, Unión libre) • Color favorito (Azul, Verde, Morado, Anaranjado, etcétera) • Sexo (Masculino, Femenino)	• Talla (Chica, Mediana, Grande, Extragrande) • Nivel socioeconómico (Bajo, Medio, Alto) • Nivel educativo (Primaria o menos, Secundaria, Bachillerato, Universidad o Posgrado)

Cuantitativos	
Discretos	**Continuos**
• Frecuencia cardiaca (74, 80, 92,…) • Número de hermanos (0, 1, 2,…) • Número de espectadores en un concierto al aire libre (200, 221, 247,…)	• Velocidad de un vehículo (60.5 km/h, 80.1 km/h, 90 km/h,…) • Estatura (146.74 cm, 157 cm, 161.7 cm, …) • Perímetro de cintura (30.7 cm, 80 cm, 91.4 cm, …)

a) ¿Cuál es la principal diferencia entre los datos cualitativos nominales y ordinales?
b) ¿Por qué sólo hay dos valores para el dato "Sexo"?
c) ¿Es posible ordenar los colores? Justifica tu respuesta.
d) ¿Cuál es la principal diferencia entre los datos discretos y los continuos?
e) ¿Por qué la frecuencia cardiaca no puede tomar el valor de 60.4 pulsos por minuto?
f) Da un ejemplo de dato cuantitativo continuo y justifícalo.
g) Considera el dato "Nivel de satisfacción en tu vida cotidiana". ¿Qué tipo de dato es?, ¿por qué?
h) ¿Qué pasa si una persona adulta presenta un perímetro de cintura de más de 100 cm?, ¿por qué? Investiga al respecto.

Comparen sus respuestas con otras parejas. Luego, en conjunto, determinen cuáles son las características fundamentales de cada tipo de dato. Por último piensen si es posible transformar los datos cualitativos ordinales en cuantitativos discretos y justifiquen sus razones.

En concreto

Los *datos nominales* indican una categoría, clase o tipo, pero no se pueden ordenar. Por ejemplo: el grupo sanguíneo o la nacionalidad.

Los *datos ordinales* indican categorías, clases o tipos, y permiten establecer un orden. Por ejemplo: la calidad del desempeño (pésima, mala, regular, buena o excelente).

Los *datos discretos* sólo consideran valores enteros. Por ejemplo: el número de hermanos o el número de asignaturas reprobadas.

Los *datos continuos* consideran cualquier valor dentro de un intervalo, es decir, dentro de un conjunto establecido de valores. Por ejemplo: las estaturas en un grupo de personas o los salarios que perciben.

Una desventaja de la gráfica de barras

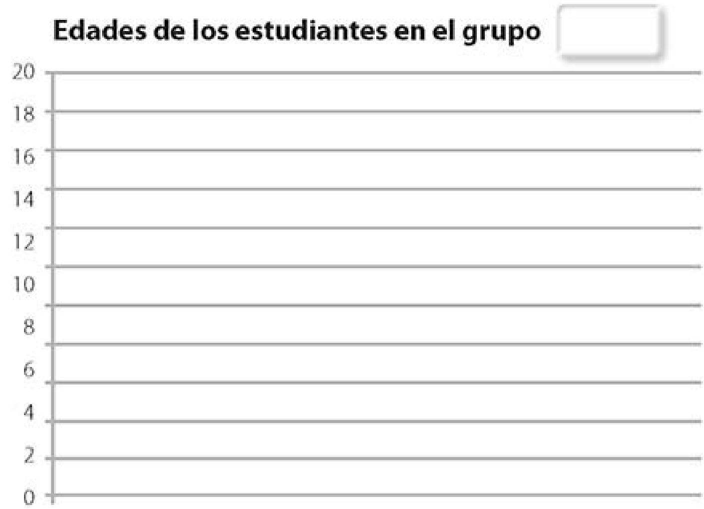
Las gráficas de barras son muy populares para transmitir información, pues son muy fáciles de comprender e interpretar, pero su uso no siempre es adecuado; eso depende del número y del tipo de dato que se pretenda procesar.

Realicen lo que se solicita en cada caso.

a) Recaben los datos sobre la edad de todos los integrantes del grupo, sin incluir al profesor de la asignatura. Organicen los datos en una tabla como la siguiente.

Edad	Frecuencia

b) Completen el gráfico de barras correspondiente a la tabla de datos anterior en el siguiente espacio.



Visión matemática

¿Cuáles son los elementos que deben considerar para trazar una gráfica de barras?

c) Respondan, ¿cuántas barras ocuparon para presentar la información?, ¿por qué?

d) Repitan el paso descrito en el inciso ***a)***, pero esta vez realizarán el sondeo incluyendo a todos los miembros de la comunidad escolar. Tomen en cuenta que habrá personas que no querrán participar, así que sólo en esos casos pueden tantear el dato sobre la edad.

e) Elaboren la tabla y la gráfica de barras correspondiente a la información recabada. ¿Qué notan?, ¿a qué dificultades se enfrentan?

Reflexionen sobre qué características de la información recabada es la causa de las dificultades e ideen un método para presentar la información que no involucre el uso de una gráfica de barras.

Las etapas de desarrollo

De acuerdo con el Ministerio de Salud y Protección Social de Colombia, el ser humano transita por las siguientes etapas de desarrollo: la infancia (de 0 a 11 años), la adolescencia (de 12 a 18 años), la juventud (de 19 a 26 años), la adultez (de 27 a 59 años) y la vejez (60 años y más); aunque aclara que no debe tomarse como una clasificación única y que se debe considerar el respeto a la diversidad individual y cultural.

Clasificaciones como la anterior, por intervalos, son comunes sobre todo cuando se trata de agrupar datos para poder procesarlos e interpretarlos.

Lean con atención la siguiente situación y respondan lo que se solicita.

Por razones de mercadotecnia, el dueño de un negocio quiere saber qué tipo de clientes son más asiduos al local. La siguiente tabla muestra los datos recabados:

Intervalo	Frecuencia
0-10	22
10-20	26
20-30	92
30-40	86
40-50	74
50-60	27
60-70	12

a) Interpreten la tabla de datos: ¿cuál es el dato recabado?, ¿qué tipo de dato se está recabando?, ¿cuál es el tamaño de la población bajo estudio?

b) ¿Cómo se agruparon los datos?, ¿por qué?

c) Para analizar los datos, ¿una gráfica de barras le sería de utilidad al dueño?, ¿por qué?

d) De acuerdo con la información recabada y teniendo en cuenta las etapas de desarrollo del ser humano, ¿qué tipo de población es la que más visita el negocio?, ¿qué tipo de negocio imaginan que atrae a esa población?

Revisen sus respuestas con otras parejas y piensen en qué harían con la información recabada si fueran los dueños del negocio. Planteen sus ideas por escrito.

En concreto

Un *intervalo* en matemáticas se refiere a un conjunto de valores entre los que un dato puede quedar incluido.

Por ejemplo, la notación 5-10 denota el número de minutos que un cliente tiene que esperar para ser atendido en un banco, el cual puede ir desde 5 minutos hasta 10 minutos.

En lo que sigue, un intervalo como 5-10 denotará los valores mayores o iguales a 5, pero menores a 10. Lo anterior, con el fin de evitar superponer datos.

Así, el intervalo 5-10 y 10-20 no repiten elementos, pues el número 10 sólo está en el segundo intervalo y no en el primero.

Siguiendo con el ejemplo, el intervalo 10-20, denota los tiempos mayores o iguales a 10 minutos y menores a 20 que los clientes de un banco tienen que esperar para ser atendidos.

La recolección de datos y la salud

Organismos internacionales dedicados a la promoción y conservación de la salud recaban datos que pueden indicar el estado de salud de los habitantes de una región o país. Entre los datos que se pueden recabar están la estatura, el peso, las circunferencias de abdomen, de cadera y de muñeca, y algunos diámetros **óseos**.

Glosario

óseo. Se refiere a los huesos.

Para llevar a cabo la siguiente actividad, necesitan una cinta métrica o en su defecto usen algún hilo grueso o estambre que después pueden medir con su regla.

***a*)** Con ayuda de la cinta métrica y por parejas, deberán tomar la medida de la circunferencia abdominal de todos los integrantes del grupo, incluyendo al profesor. Los organismos de salud tienen pautas específicas sobre el lugar más recomendable para tomar la medida, pero para efectos prácticos la tomarán a nivel de su ombligo, como se muestra en la ilustración a la derecha.

***b*)** Registren los datos en una tabla y después organícenlos por intervalos.

***c*)** Con los datos organizados, completen en su cuaderno una tabla como la siguiente:

Intervalo	Frecuencia

Justifiquen el número y el tamaño de los intervalos que escojan.

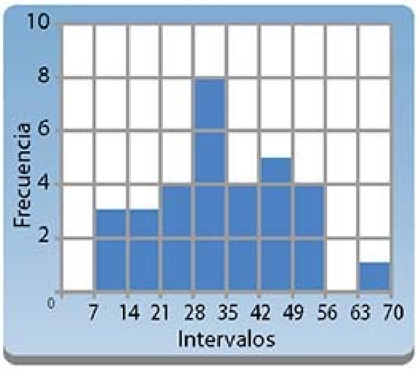
***d*)** Representen la información de la tabla usando como base la siguiente plantilla:

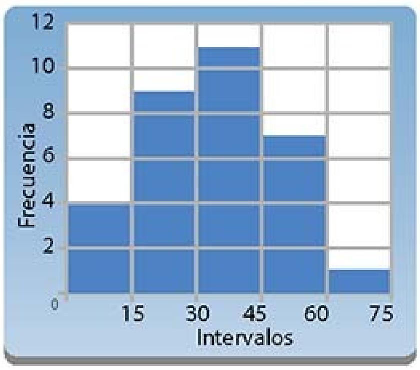
En el eje horizontal, deben sustituir las palabras "Primero", "Segundo", "Tercero" y "Cuarto" por los valores que hayan definido para cada intervalo. Consideren que es sólo una plantilla y ustedes pueden modificarla con respecto al ancho de los intervalos o al número de los mismos.

e) Respondan, ¿cómo determinaron el tamaño de los intervalos?, ¿por qué? ¿En la representación usaron barras juntas o separadas?, ¿por qué?

En plenaria, reflexionen sobre la actividad, piensen cómo nombrarían la representación gráfica de los datos en este caso y comenten ventajas y desventajas de la misma. Registren todas sus ideas por escrito para que puedan contrastarlas con los conocimientos que vayan construyendo.

Los siguientes histogramas representan el mismo conjunto de datos.





Analízalos con atención,responde a lo que se te solicita y, al final, compara tus ideas con las de un compañero.

a) ¿Cuál es la diferencia principal entre las gráficas de barras y los histogramas?

b) ¿Cuál es la diferencia entre ambos histogramas?

c) ¿Qué determina el número de intervalos a utilizar y su tamaño?

d) ¿Sería útil un histograma con un intervalo?, ¿con dos? ¿Cuál es el número óptimo de intervalos a usar?

e) Con base en el histograma de la izquierda, ¿es correcto decir que no se registraron datos menores a 7?, ¿por qué?

f) ¿Por qué el histograma de la derecha muestra que sí se registraron datos entre 0 y 7?, ¿no contradice esto a la respuesta del inciso anterior?, ¿a qué crees que se debe?

g) ¿Qué dato crees que se representa con los histogramas mostrados?

En concreto

Un *histograma* es una representación gráfica de datos agrupados mediante intervalos.

Son útiles si lo que se quiere mostrar es la distribución de datos cuantitativos continuos.

Los puntos medios

Muchas veces el uso de los intervalos en la construcción de histogramas resulta confuso, pues queda la duda de en cuál intervalo se debe incluir el límite superior del mismo.

Lean con atención la siguiente situación y den respuesta a lo que se solicita.

La siguiente tabla de datos muestra la duración en segundos de diferentes anuncios comerciales en televisión que se transmiten durante el día en cierto canal.

18	10	15	18	25	20	15
30	18	10	40	45	30	25
10	50	55	10	30	30	20
20	25	55	10	30	15	30
45	15	5	40	10	10	30
5	20	45	50	30	30	45
10	20	45	10	10	18	55
15	25	20	30	30	20	5

a) ¿Qué tipo de dato es "La duración de los comerciales"? Justifiquen su respuesta.
b) ¿Cuál es el dato mayor?, ¿cuál el menor?
c) Utilicen desde dos hasta seis intervalos del mismo tamaño para agrupar los datos; determinen cuál es el número óptimo de intervalos para analizarlos. Por ejemplo: al utilizar dos intervalos, los datos quedarían agrupados entre 0-30 y 30-60; al usar tres, se agruparían en los intervalos 0-20, 20-40 y 40-60, etcétera.
d) Organicen los datos en una tabla de frecuencias de acuerdo con el número óptimo de intervalos elegido en el inciso anterior.
e) Tracen el histograma correspondiente, pero en lugar de indicar los intervalos, sólo indiquen el punto medio de cada uno. Por ejemplo, si uno de sus intervalos es 0-10, el punto medio es 5. Si uno de sus intervalos es 0-15, el punto medio es 7.5.
f) ¿Qué ocurriría con el histograma si se duplica el número de intervalos utilizados?, ¿qué pasa con los puntos medios?
g) ¿Consideran útil usar los puntos medios cómo indicadores de lo que pasa al interior de los intervalos?, ¿por qué?
h) ¿Para qué consideran que puede ser útil el procesamiento y análisis de los datos expuestos en este caso mediante un histograma?

Comparen los histogramas que realizaron con otras parejas y determinen la utilidad de los puntos medios como indicadores de los intervalos.

En concreto

El *punto medio* (también llamado *marca de clase*) de un intervalo es el promedio de los valores extremos del intervalo.

Por ejemplo, en el intervalo 8-14, el punto medio se calcula como:

$$\frac{8+14}{2} = 7$$

El punto medio funciona como una cantidad representativa de todos los valores que están incluidos en el intervalo.

Visión matemática

¿Cuánto duran en promedio los anuncios de TV que ustedes observan en la televisión?

Comparación de datos y gráficos

Lean con atención la siguiente situación y realicen lo que se solicita en cada caso.

La siguiente tabla muestra el salario en pesos por hora que perciben 55 trabajadores, 30 hombres y 25 mujeres, en una pequeña empresa. Se quiere determinar si hay diferencias significativas entre las ganancias percibidas por hombres y por mujeres.

Salario (pesos por hora)	H	M
30-60	1	0
60-90	1	1
90-120	2	7
120-150	5	10
150-180	10	6
180-210	8	1
210-240	3	0

a) Sólo con una mirada a la tabla, ¿les parece que las mujeres ganan menos que los hombres? Justifiquen su respuesta.

b) ¿Cuál es el punto medio de los intervalos elegidos?, ¿por qué?

c) ¿Qué sería más práctico para comparar los datos, realizar por separado los histogramas correspondiente para hombres y mujeres o sobre un mismo histograma dibujar el de ambos conjuntos de datos? Proporcionen argumentos sólidos para defender su postura al interior del equipo, todos deben llegar a un acuerdo.

d) Observen la siguiente representación gráfica de los datos de la tabla:

¿En qué se parece a los histogramas?, ¿en qué es diferente?

e) ¿Por qué no se usó el punto medio para indicar los intervalos?

Transversalidad

Pregunta a tu profesor de Formación Cívica y Ética por documentos o fuentes de información confiable que aborden el tema de la igualdad entre hombres y mujeres en materia de puestos y salarios.

Analiza y procesa los datos que encuentres y da tu opinión al respecto, sustentada por el pensamiento matemático.

f) ¿Por qué se agregaron los intervalos 0-30 y 240-270 al principio y al final del eje horizontal, respectivamente? Justifiquen.
g) ¿La forma de las líneas de colores les indican algo sobre una posible desigualdad en las ganancias salariales entre hombres y mujeres? Expliquen a detalle.
h) ¿Influye en algo la diferencia en la cantidad de hombres y mujeres que fueron parte de la toma de datos? Justifiquen.
i) ¿Qué nombre le darían a representaciones como la anterior?, ¿por qué?

En plenaria, discutan las ventajas de este tipo de representaciones sobre los histogramas y consígnelas por escrito.

En concreto

Un *polígono* de *frecuencias* es la gráfica que resulta al unir, mediante segmentos de recta, los puntos medios de la parte superior de las barras de un histograma.

Cabe hacer notar que se une el polígono de frecuencias al eje horizontal en el punto medio de un intervalo vacío a cada lado del histograma, es decir, el polígono de frecuencias siempre empieza y termina sobre el eje horizontal.

X Observa con atención la siguiente tabla de datos.

Desempeño	Grupo A	Grupo B
Insuficiente	4	4
Suficiente	10	8
Notable	4	2
Sobresaliente	1	2

a) ¿Qué tipo de dato es el "Desempeño"?, ¿por qué?
b) ¿Será posible realizar un histograma de los datos mostrados en la tabla?, ¿por qué?
c) ¿Será posible trazar polígonos de frecuencias para comparar los datos mostrados?, ¿cómo lo harías?
d) Considera el siguiente cambio en la información presentada en la tabla:

Desempeño	Grupo A	Grupo B
0-2.5	4	4
2.5-5	10	8
5-7.5	4	2
7.5-10	1	2

¿En qué tipo de dato se ha transformado el "Desempeño"?
e) Establece los puntos medios de los intervalos mostrados y traza los segmentos de recta apropiados.
f) Con base en lo anterior, compara el desempeño de dos grupos de estudiantes y obtén conclusiones sobre los datos expuestos.

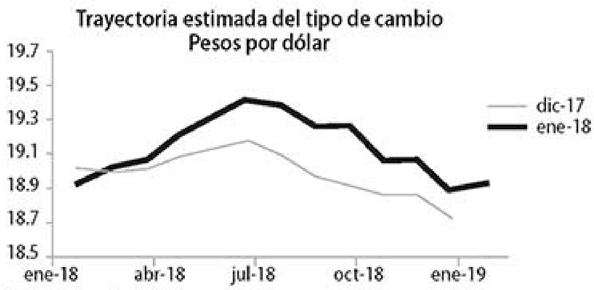
En plenaria, revisen las diferentes interpretaciones que hicieron de los datos. Pueden realizar un ejercicio similar a este para comparar el desempeño de su grupo con el de otro del mismo grado en la asignatura de matemáticas.

Gráficas de líneas

Seguro que has visto polígonos de frecuencias en diversos medios, pero debes tener cuidado porque hay otras representaciones parecidas que se usan en otros contextos.

Considera las siguientes gráficas, analiza cada una de ellas y responde lo que se te solicita.

Fuente: Luminocity3d, 2018.



Fuente: Banxico, 2018.

a) Enlista las semejanzas y diferencias entre las tres gráficas. ¿Cuál crees que es la principal diferencia que las distingue?

b) Dos de las gráficas parecen predecir los datos en fechas posteriores a la actual. Identifícalas y explica cómo realizarías la predicción.

c) Haz un análisis de las gráficas que identificaste en el inciso anterior e interprétalas, luego escribe un breve párrafo al respecto. Investiga por qué a este tipo de gráficas de líneas también se les conoce como gráficos de series temporales..

Comenta tus respuestas con un compañero, realicen un acopio de gráficas similares para llevarlas al salón y analizarlas de forma grupal.

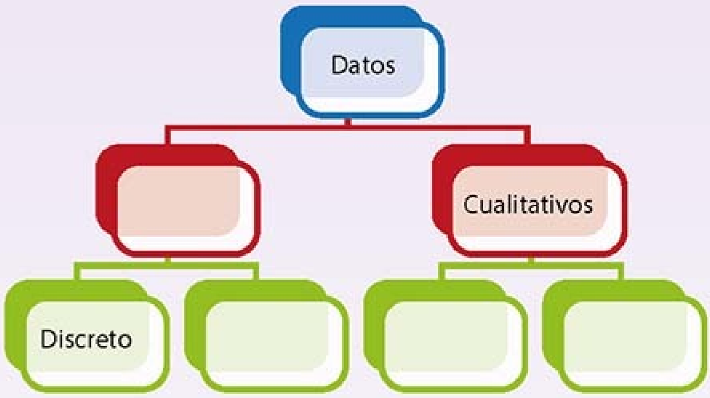
En concreto

Las *gráficas de líneas* muestran cómo cambia un dato a lo largo de un periodo.

πensa

Realiza las siguientes actividades para consolidar lo que aprendiste durante esta secuencia.

a) Completa el siguiente cuadro sinóptico en el que se detallan los diferentes tipos de datos. Ofrece ejemplos de cada uno, diferentes a los abordados en esta secuencia didáctica. Selecciona un tipo de dato y lleva a cabo una investigación para conocer más al respecto, ya sea dentro de la comunidad escolar o de la zona en la que vives.



b) Acude con el encargado de la biblioteca escolar o de tu comunidad y pregúntale si utiliza los histogramas, los polígonos de frecuencia o las gráficas de línea en su trabajo. En caso afirmativo, pídele que te explique cómo obtuvo, procesó y analizó los datos. Además, solicítale te muestre las gráficas que elaboró y toma nota de ellas para que las interpretes. En caso negativo, ofrécele tu ayuda para recolectar, procesar y analizar datos sobre los hábitos de lectura de la comunidad escolar; después, comparte el resultado de la colaboración hecha mediante un periódico mural o volantes. No olvides incluir gráficas para exponer la información. Puedes elegir a cualquier otro trabajador de tu comunidad y adecuar las indicaciones de esta actividad.

c) Elabora un histograma correspondiente a la siguiente tabla de datos. ¿Qué te imaginas que representan los datos expuestos?

5.6	4.5	10	9.6	8.6	5.7	3.5	2.5	6.5	3.8
7.4	6.9	7.5	7	6.5	5.5	8	6	9	4.5
2.6	3.4	9.2	7.5	5.2	7	5.7	8	6	7.4

Después de verificar los resultados de estas actividades, de forma grupal reflexionen sobre los conocimientos y habilidades que adquirieron al llevarlas a cabo.

Enl@ce

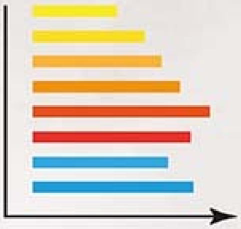
En la página 11 del documento digital disponible en el siguiente enlace **http://www3.fi.mdp.edu.ar/estadisticabasica/Materiales/introEstadistica.pdf** encontrarás 50 datos. Utilízalos para trazar un histograma y encontrar los valores atípicos. Por último, usa el contexto del problema y da una interpretación adecuada a los datos presentados.

Pruébate

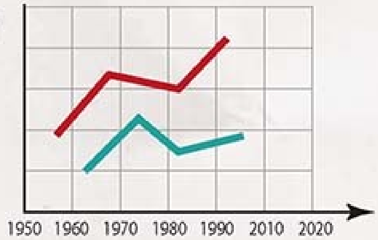
Selecciona la respuesta correcta para cada pregunta.

1. ¿Cuál de las siguientes imágenes representa una gráfica de líneas?

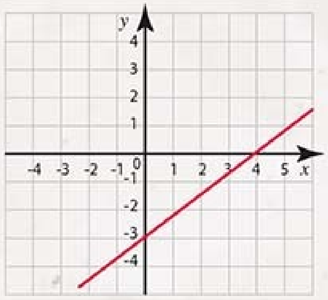
a)



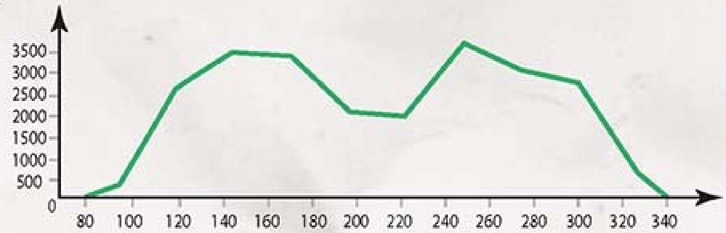
c)



b)



d)



2. ¿Cuál de los siguientes gráficos no es adecuado para presentar la información de la siguiente tabla?

Mes	E	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D
Temperatura (°C)	−1	3	8	9	11	13	20	25	21	14	9	4

a) Gráfica de barras

b) Histograma

c) Gráfico de líneas

d) Gráfica circular

3. ¿Cuál es el gráfico más adecuado para exponer información referente a datos cuantitativos discretos?

a) El histograma
b) La gráfica de barras
c) La gráfica de líneas
d) El polígono de frecuencias

Corrijo y aprendo

¿Te equivocaste? Debes ser capaz de detectar los fallos, pero más importante es que reflexiones sobre ellos para que los corrijas.

Usa e interpreta las medidas de tendencia central (moda, media aritmética y mediana), el rango y la desviación media de un conjunto de datos y decide cuál de ellas conviene más en el análisis de los datos en cuestión

Empieza

Has abordado algunos de los conceptos de esta secuencia didáctica en grados anteriores por lo que debes ser capaz de dar una respuesta convincente a cada uno de los siguientes cuestionamientos. Para confirmar tus respuestas compáralas con las de un compañero y concilien las diferencias a través del diálogo y la escucha activa.

a) Calcula la media aritmética del siguiente conjunto de datos.

5, 3, 6, 5, 4, 5, 2, 8, 6, 5, 4, 8, 3, 4, 5, 4, 8, 2, 5, 4

b) Se realizó una encuesta para conocer los materiales de lectura que revisan con mayor frecuencia los jóvenes de cierta comunidad. La siguiente tabla muestra los datos recabados:

Blog	Revista	Cómic	Red social	Libro
Revista	Cómic	Libro	Red social	Blog
Red social	Red social	Revista	Revista	Red social
Cómic	Cómic	Red social	Cómic	Revista
Revista	Cómic	Cómic	Red social	Blog
Blog	Libro	Libro	Red social	Red social

¿Cuál es la moda?

c) Escribe una **C** o una **I**, en los recuadros de la derecha, dependiendo de si la afirmación sobre el análisis y procesamiento de los siguientes datos es correcta o incorrecta.

6	3	4	2	5	5	6	4	5	6
8	9	6	7	7	6	4	6	10	6

La mediana de los datos es 6. ☐

El rango del conjunto de datos es 9. ☐

El promedio de los datos es menor a 6. ☐

El conjunto de los datos es bimodal, es decir, hay dos modas. ☐

El valor más grande del conjunto es 10. ☐

Para obtener la mediana del conjunto de datos es necesario ordenarlos. ☐

Avanza

El rango y las medidas de tendencia central

En grados anteriores has usado las medidas de tendencia central para representar a todo un conjunto de datos mediante un valor característico o central. Ahora profundiza en ese aspecto al determinar cuál de ellas es más conveniente usar para el ánalisis de los datos en cuestión.

Realicen lo que se solicita en cada caso.

a) En la secuencia didáctica anterior recabaron los datos de la edad de todos los integrantes del grupo, sin incluir al profesor de la asignatura. Recuperen esa información y completen las siguientes dos tablas. La tabla de la izquierda no se modifica, es la misma que utilizaron con anterioridad, pero en la de la derecha deben agregar la edad de su profesor de Matemáticas. Si por razones personales no acepta compartir ese dato, pídanle que seleccione un número entre 30 y 50.

Edades de los estudiantes del grupo	Frecuencia
11	
12	
13	
14	
15	
16	

Edades de los estudiantes del grupo	Frecuencia
11	
12	
13	
14	
15	
16	
Edad del profesor	

b) Calculen en ambos casos las medidas de tendencia central: media, mediana y moda. También indiquen el *rango* de cada conjunto de datos. Registren los resultados en el siguiente arreglo donde **I** representa el conjunto de datos de la tabla izquierda anterior y **D** representa el conjunto de datos de la tabla derecha anterior.

Indicador	I	D
Media		
Mediana		
Moda		
Rango		

En concreto

El *rango* es igual a la diferencia que existe entre el mayor y el menor de un conjunto de datos cuantitativos.

Rango = Valor máximo − Valor mínimo

Por ejemplo, si el conjunto de datos es 8, 9, 13, 11, 12, 12, 15 y 25, el mayor valor es 25 y el menor, 8, por lo que el rango es igual a la diferencia: $25 - 8 = 17$.

Un valor grande del rango sugiere que los datos del conjunto están muy alejados unos de otros, y por tanto, es posible que los valores centrales como la media, mediana o moda, no sean representativos. Por otro lado, si el valor del rango es pequeño, los datos no están muy distanciados entre sí y los valores centrales sí pueden ser representativos del conjunto.

En el ejemplo, el rango es igual a 17 y, dado que el número total de datos es 8, el rango se considera grande pues con pocos datos hay una gran diferencia entre el menor y el mayor. Observa que la media (13.125), la mediana (12) o la moda (12) no resultan valores representativos del conjunto de datos.

En concreto

Para analizar un conjunto de datos, además de considerar su rango es necesario tomar en cuenta que cada medida de tendencia central tiene sus ventajas y desventajas.

Por ejemplo, aunque la media aritmética es la más usada y de fácil cálculo, es poco representativa cuando hay valores extremos, grandes o pequeños, en el conjunto de datos. En esos casos, conviene usar la mediana, pero hay que tener en cuenta que a veces no es fácil ordenar los datos y no existe una fórmula para calcular la mediana. Respecto de la moda, aunque se puede determinar por inspección y no mediante cálculos, una gran desventaja es que no siempre existe. Por otro lado, cuando existe es posible que no sea única, y resulta representativa sólo cuando hay una gran cantidad de datos.

Por ejemplo, en el conjunto de datos 2, 2, 4 y 4, el rango es 2, lo que indica poca dispersión en los datos, de manera que las medidas de tendencia central serán representativas. Pero en el conjunto 1, 1, 4 y 6, el rango es 5, un valor grande pues resulta mayor que el número de datos. Entonces las medidas de tendencia central no resultarían adecuadas. La media del conjunto de datos es 3, su mediana es 2.5 y la moda es 1.

c) Respondan, ¿cuál de las medidas: media, mediana o moda es más representativa del conjunto de datos I?, ¿y del conjunto D? Justifiquen su respuesta.

d) Tomen en cuenta el rango del conjunto I, ¿es un valor pequeño o grande? ¿Qué hay con respecto al rango del conjunto D?

e) ¿Creen que el rango de un conjunto de datos les puede ayudar para definir cuál de las tres medidas de tendencia central es más representativa? Intercambien sus ideas y defiéndanlas con argumentos sólidos..

f) Completen la siguiente afirmación: "Si el rango de un conjunto de datos es muy grande entonces en lugar de la ______ es más conveniente usar la ______ como un valor central del conjunto de datos". Justifiquen sus respuestas.

Recuerden que también recopilaron la edad de todos los integrantes de la comunidad escolar, obtengan el rango de ese conjunto de datos y con base en él determinen cuál es la medida de tendencia central que mejor representa la edad "promedio" de un miembro de la comunidad.

Considera los siguientes conjuntos de datos y realiza lo que se solicita en cada caso.

- 1, 1, 1, 1, 1, 7, 7, 8, 8, 8, 8
- 14, 2, 14, 15, 5
- 0.79, 0.63, 0.88, 0.56, 0.94, 0.21, 0.96, 0.92, 0.82, 0.10, 0.08, 0.47, 0.48, 0.69, 0.85, 0.90, 0.89, 0.03, 0.20, 0.23, 0.38, 0.68, 0.17, 0.40, 0.59, 0.30, 0.52, 0.78, 0.66, 0.65
- 1, 7, 8, 7, 8, 9, 7, 7, 7, 8, 8
- 7.4, 11.6, 6.2, 51.2, 72.1, 46.4, 74.5, 62
- 1.741, 1.904, 1.698, 1.931
- 2, 2, 6
- 17, 10, 9, 1, 2, 10, 14
- 4.33, 4.54, 8.51, 1.14, 5.89
- 10.2, 5, 27, 26.3, 28.5, 11, 13.7, 7.2, 22.2, 17.6

a) Primero calcula el rango de cada conjunto de datos.

b) Con base en el rango decide cuál de las medidas de tendencia central es más adecuada como representante de cada conjunto de datos.

c) Calcula la media, mediana y moda de cada conjunto.

d) Con los cálculos anteriores evalúa tus decisiones, ¿tus primeras impresiones fueron correctas?, ¿por qué?

e) ¿Qué otros aspectos consideras necesarios para definir la medida de tendencia central adecuada?

Propón otros conjuntos de datos si requieres practicar más.

Indiquen en cada caso cuál medida de tendencia central resulta más adecuada como representante del valor central del conjunto de datos que se ilustra.

Los pesos de los seres que aparecen en la fotografía son: 31.1 kg, 37.8 kg, 29.6 kg y 28.3 kg, en orden de izquierda a derecha.

El contenido en mililitros de los vasos es, en orden de izquierda a derecha: 340, 335, 325, 335, 345, 320, 325, 345.

Comparen sus respuestas con otras parejas para validarlas y propongan ideas sobre otra medida, diferente al rango, que les permita determinar la dispersión de los datos. Registren sus ideas por escrito para que más adelante puedan compararlas con el conocimiento que van construyendo.

En concreto

La *dispersión* de los datos se refiere a qué tan diferentes son los datos entre sí.

Determinen el efecto que tiene el cambio en algunos valores en los siguientes conjuntos de datos sobre la media, la mediana, la moda y el rango.

6	7	7	8	8	8	8	9	9	10
6	7	7	7	7	8	9	9	10	10

2	4	5	5	7	8
2	4	5	5	7	10

25	65	65	75	95
25	35	75	95	95

21	23	24	24	25	26	26	27
15	23	24	24	25	26	26	44

Realicen un análisis de los resultados y establezcan conclusiones sobre la necesidad de considerar no sólo las medidas de tendencia central sino también medidas de dispersión.

El diagrama de puntos

En la secuencia didáctica anterior aprendiste a trazar histogramas y te percataste de su utilidad para analizar colecciones de datos. Una desventaja de su uso es que se requiere definir intervalos tanto en número como en tamaño, lo que no siempre resulta sencillo. Otra manera de analizar datos es a través del diagrama de puntos.

Para comprender su construcción considera la siguiente situación y realiza lo que se solicita.

Glosario

calibre. Se refiere a una medida representativa del tamaño de la fruta o la verdura.

En una fábrica de empaquetamiento de frutas y verduras, una máquina de rodillos clasifica los tomates por su **calibre** en milímetros como se muestra en la siguiente ilustración:

El producto se reparte en cajas destinadas a la venta en el mercado local o se envían a fábricas que lo procesan.

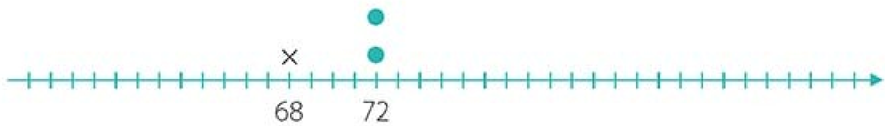
La siguiente tabla representa el calibre que se tomó a una muestra de 50 jitomates:

61	82	61	77	67	66	65	71	82	68
82	72	61	66	66	77	71	79	69	66
71	76	77	68	77	60	81	75	69	72
73	73	74	65	67	61	64	81	61	71
78	73	61	78	61	77	78	78	75	69

a) Calcula el rango del conjunto de datos.

b) Posiciona debajo de la siguiente recta los valores máximo y mínimo del conjunto de datos a una distancia adecuada entre ellos para que puedas posicionar los posibles valores entre ellos.

c) Por cada dato coloca un punto (•) o un tache (×) sobre la recta. En la siguiente imagen se ha ilustrado un dato con un tache sobre el número 68 y dos datos con un punto, cada uno sobre el número 72. Si un dato aparece más de una vez, deberás apilar las marcas.



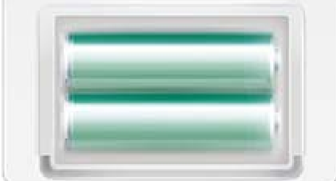
d) Completa el diagrama en tu cuaderno.
e) Observa y analiza con atención el diagrama de puntos y responde:
- A partir del diagrama ¿es posible calcular la media?
- ¿Cómo se calcula la mediana usando el diagrama?
- ¿Cómo se identifica la moda?

f) ¿Cómo puedes interpretar lo observado en el diagrama con respecto a la situación del calibre de los jitomates? Explica a detalle.
g) ¿Cuál es la utilidad del diagrama de puntos?, ¿te pareció sencilla y útil su construcción?

Piensa en qué casos resulta útil la construcción de un diagrama de puntos.

Consideren el siguiente par de diagramas de puntos:

Los datos representan la duración en horas de dos tipos de pilas, las de la marca A y las de la marca B.



Marca A

Visión matemática

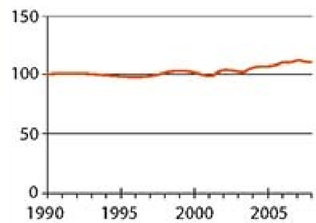
¿Los diagramas de puntos te parecen semejantes a las gráficas de barras o a los histogramas?

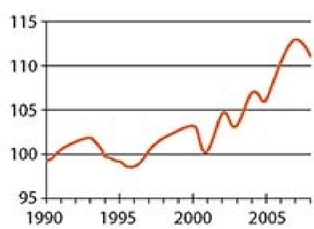
Debes determinar en qué casos es adecuado cada gráfico para evitar incurrir en **sesgos** en la información.

Glosario

sesgo. Es un error o una mala interpretación en que se puede incurrir cuando se presenta información incompleta, fragmentada o engañosa mediante tablas o gráficas.

Por ejemplo, las siguientes gráficas representan el mismo conjunto de datos pero, debido a la diferente escala usada en el eje vertical, la gráfica superior presenta un proceso casi uniforme o con poca variación. En cambio, en la inferior se puede apreciar mucho mejor la variabilidad de los datos.





En concreto

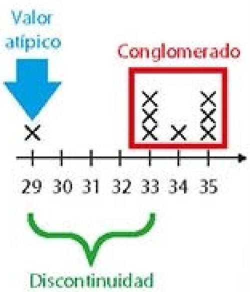
Un *valor atípico* en un diagrama de puntos es un dato muy pequeño o muy grande, alejado de los demás.

Un *conglomerado* en un diagrama de puntos es un agrupamiento de datos.

Las *discontinuidades* son grandes separaciones entre los datos graficados en un diagrama de puntos.

Ejemplo:

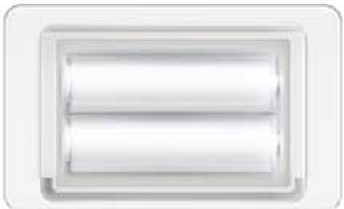
Considera el conjunto 29, 33, 33, 35, 35, 33 y 34, números que representan las temperaturas, en °C, registradas en una región del estado de Sinaloa durante una semana.



Un valor atípico es 29, porque es un dato alejado de los demás.

Los datos agrupados entre 33 y 35 forman un conglomerado.

Hay una discontinuidad entre los datos que están entre 29 y 33.



Marca B

Realicen lo que se solicita en cada caso.

a) De un rápido vistazo, ¿cuál marca de pila consideran que sea más duradera?

b) Completen la siguiente tabla:

Indicador	A	B
Rango	15	
Media		
Mediana		
Moda		

c) ¿Al usar la tabla pueden establecer de forma convincente cuál pila es más duradera?

d) Localicen los valores atípicos en ambos diagramas.

e) Determinen los conglomerados en ambos diagramas.

f) Identifiquen las discontinuidades en ambos diagramas.

g) ¿Los conceptos de valor atípico, conglomerado y discontinuidad les ayudan a determinar cuál marca de pila es más duradera? Justifiquen su respuesta.

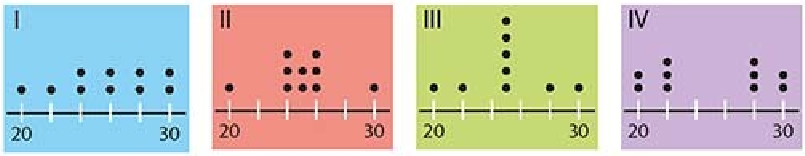
h) En su cuaderno en la misma gráfica tracen los polígonos de frecuencias para los datos de la marca A y la marca B, usen intervalos de tamaño 5 y comiencen con el intervalo 85-90. ¿El polígono de frecuencias les permite determinar cuál marca de pila es más duradera?

Validen sus respuestas y procedimientos con otras parejas y reflexionen sobre la conveniencia de usar los diagramas de puntos para realizar la comparación entre dos conjuntos de datos en lugar de los polígonos de frecuencias.

Otros indicadores de la dispersión de los datos

El rango es una medida muy fácil de calcular pero sólo toma en cuenta los datos extremos, el máximo y el mínimo, y no permite entender qué pasa con los valores que están entre esos dos valores.

Observa los siguientes diagramas de puntos y realiza lo que se te solicita.



a) ¿Cuál es el rango en cada caso?
b) ¿Hay valores atípicos en los diagramas? Táchalos.
c) ¿Hay conglomerados en los diagramas? Circúlalos.
d) ¿Existen discontinuidades? Identifícalas con un rectángulo.
e) Justifica que, en este caso, el rango, por sí solo, no permite hacer inferencias acerca del comportamiento de los datos entre los valores máximo y mínimo.
f) Al observar los puntos en el diagrama I se obtiene el siguiente conjunto: 20, 22, 24, 24, 26, 26, 28, 28, 30 y 30. Completa lo siguiente:

- La media de los datos es: ______
- La mediana es: ______
- La moda es: ______
- El valor central representativo del conjunto de datos es: ______ porque ______

g) Completa la siguiente tabla para los diagramas II, III y IV.

Diagrama	Media	Mediana	Moda
I	25.8	26	24
II			
III			
IV			

Enl@ce

Con el recurso interactivo disponible en el siguiente enlace https://conteni2.educarex.es/mats/101141/mat_sd15_oa12/index_sd15_oa12.html podrás practicar conceptos y cálculos referentes a las medidas de tendencia central.

h) A partir de la tabla del inciso anterior, determina cuál es el valor central (media, mediana o moda) más representativo de cada conjunto de datos. Completa la siguiente tabla.

Diagrama	Valor central
I	25.8
II	
III	
IV	

i) Para los diagramas II, III y IV, calcula en tu cuaderno la distancia entre cada dato y el valor central que determinaste en el inciso anterior; es decir, calcula el valor absoluto de la diferencia de cada dato respecto del valor central. Por ejemplo, en el diagrama I, la distancia del dato 20 al valor central, 25.8, es igual a $|25.8-20|=|5.8|=5.8$. Los demás valores se muestran en la siguiente tabla:

Dato	20	22	24	24	26	26	28	28	30	30
Distancia al valor central	5.8	3.8	1.8	1.8	0.2	0.2	2.2	2.2	4.2	4.2

En concreto

La *desviación media* o *desviación promedio* es el promedio de las desviaciones (distancias) de los datos con respecto a la media de los mismos.

j) Suma las distancias al valor central para los conjuntos de puntos de los diagramas II, III y IV. En el caso del diagrama I, la suma de las distancias, según la tabla del inciso anterior, es igual a 26.4. Completa la tabla.

Diagrama	Suma de las distancias al valor central
I	26.4
II	
III	
IV	

k) ¿En cuál conjunto de datos resulta mayor la suma anterior?, ¿qué significado crees que tiene esto?

Reúnete con un compañero. Expongan uno a otro sus ideas sobre cómo pueden utilizar lo aquí descrito para analizar la dispersión de los datos. Tomen nota de las ideas que consideren más relevantes o interesantes.

La desviación media

Lean con atención la siguiente situación y lleven a cabo lo que se solicita:

Para realizar una práctica de laboratorio, los estudiantes de un grupo de segundo grado de secundaria utilizaron dos básculas digitales, **A** y **B**, con la finalidad de pesar un vaso de precipitados. Tomaron diez registros y desean saber la masa del vaso, en gramos, con la mayor **precisión** posible.

Báscula A	Distancia a la media	Báscula B	Distancia a la media
27.67		27.64	
27.66		27.66	
27.68		27.66	
27.66		27.66	
27.65		27.67	
27.67		27.66	
27.67		27.67	
27.66		27.67	
27.68		27.64	
27.67		27.64	

***a*)** En su cuaderno, cada uno calcule la media, la mediana, la moda y el rango para uno de los conjuntos de datos. Pueden ayudarse con una calculadora. Redondeen los resultados a dos cifras decimales. ¿Qué notan?

***b*)** Registren, en la columna adecuada de la tabla anterior, la distancia entre cada dato y la media.

***c*)** Obtengan el promedio de las distancias de los datos a la media para cada conjunto. Es decir, sumen las distancias de todos los datos a la media y divídanlas entre diez, que es el total de elementos considerados. ¿En cuál conjunto de datos es mayor el resultado?

***d*)** La *desviación media* o *desviación promedio* es el promedio de las desviaciones (distancias) de los datos respecto de la media de los mismos. A partir de esta definición, interpreten el resultado del inciso ***c*)** y expliquen por qué, a medida que aumenta la desviación media, también aumenta la dispersión de los datos.

***e*)** ¿Cuál es la báscula más precisa?, ¿cuál es la masa del vaso?

***f*)** ¿Por qué en esta situación fue necesario considerar la desviación media?

En media cuartilla, expliquen por escrito cuál es la importancia de considerar tanto las medidas de tendencia central como las medidas de dispersión (el rango o la desviación media, por ejemplo), para realizar un análisis adecuado de un conjunto de datos.

Glosario

precisión. Es la propiedad de un instrumento de medición que asegura que las mediciones presentan poca dispersión o que se encuentran dentro de una desviación establecida.

En concreto

Recuerda de la página 172 que el *redondeo* es una forma de aproximar números.

Por ejemplo, la representación decimal de $\frac{2}{3}$ igual a 0.666... se puede redondear hasta centésimos a 0.67 y el valor del número $\pi = 3.14159...$ se puede redondear hasta diezmilésimos como 3.1416 o como 3.14 hasta centésimos.

πensa

Con el fin de reafirmar lo que estudiaste durante esta secuencia didáctica resuelve en tu cuaderno cada una de las siguientes actividades.

a) Explica la diferencia que existe entre las medidas de tendencia central y las medidas de dispersión.

b) Usa el concepto de desviación media abordado en esta secuencia didáctica para explicar la diferencia en el aprovechamiento de dos grupos de estudiantes cuyas calificaciones se reportan a continuación.

Grupo A	10	6	9	9	7	8	8	8	7	8
Grupo B	6	7	10	10	9	8	9	7	7	7

c) Calcula la media, mediana, moda, rango y desviación media del siguiente conjunto de datos. Además, interpreta los resultados, para ello piensa en un contexto adecuado en el que puedan ser válidos los datos.

3	11	8	22	7	5	3	11	12
2	4	9	6	4	2	18	16	13
5	3	20	17	2	10	18	1	4
8	15	4	5	15	17	3	8	2
2	4	3	2	6	9	6	14	1

En plenaria revisen las respuestas de las actividades y refuercen los temas o conceptos que todavía les generan duda, para ello pueden proponer algún conjunto de datos obtenido de un contexto real y procesarlo con lo que aprendieron.

Reunidos en equipos, realicen una investigación para conjuntar información suficiente respecto de los siguientes datos:

- La talla de pantalón más vendido en una tienda.
- Las calificaciones de un grupo escolar en la asignatura de Inglés.
- El color favorito de un grupo de niños de preescolar.
- El tiempo que tarda en ser atendido un cliente en la fila rápida de una tienda de autoservicio.
- El tamaño de las alas de las mariposas monarca que llegan a la Reserva de la Biosfera de la Mariposa Monarca en Michoacán.

Una vez que tengan información suficiente, utilicen lo que aprendieron y determinen cuál es la media de tendencia central (media, mediana o moda) más apropiada para representar cada conjunto de datos.

Corrijo y aprendo

En el enlace **https://www.thatquiz.org/es-p-z1/matematicas/fraccion/medias/** puedes realizar una prueba para verificar tus conocimientos. En la parte superior izquierda con la lista desplegable "Largo" puedes modificar la cantidad de ejercicios, selecciona el nivel de dificultad de 1 a 10 y establece un tiempo límite para responder de hasta 30 minutos. Marca las casillas correspondientes a "Rango", "Promedio", "Mediana", "Moda" y selecciona el botón de opción "Enteros", "Fracciones" o "Decimales" de tu preferencia.

Toma nota de los errores que cometiste y corrígelos en tu cuaderno.

Pruébate

Selecciona la respuesta correcta para cada pregunta.

1. ¿Cuál es la medida más adecuada para representar el siguiente conjunto de datos?

0	1	2	3	4	100

a) La media
b) La mediana
c) La moda
d) La desviación media

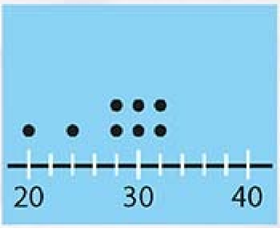
2. ¿Cuál afirmación es incorrecta con respecto al siguiente conjunto de datos?

1, 3, 5, 7, 8, 12

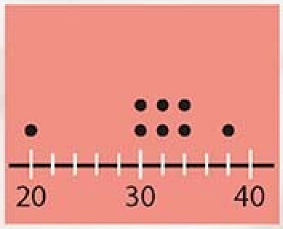
a) No tiene moda
b) La media es 6
c) La mediana es 6
d) La desviación media es 4

3. ¿En cuál diagrama de puntos el valor de la mediana es igual a 30?

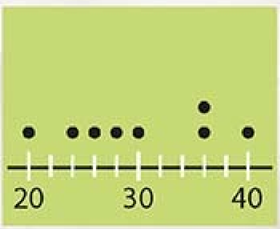
a)



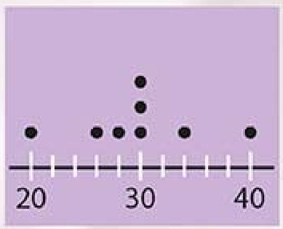
c)



b)



d)



4. ¿Cuál es el conjunto de valores que cumple con las siguientes condiciones: media aritmética 0, mediana 0, rango 2 y desviación media 1?

a) 0, 0, 2
c) −1, 0, 1
b) −1, 0, 2
d) 0, 1, 2

Corrijo y aprendo

¿Cuál fue tu desempeño en esta evaluación?

Analízalo de forma crítica.

Determina la probabilidad teórica de un evento en un experimento aleatorio

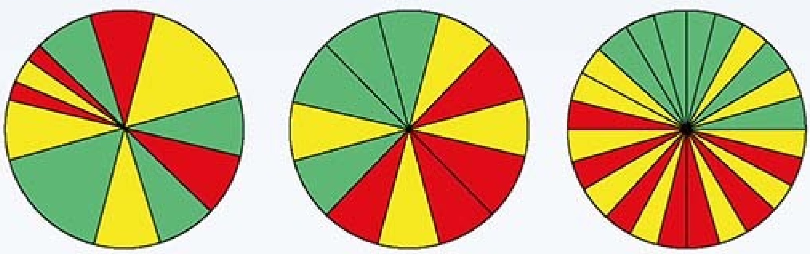
Emπeza

Con la finalidad de rescatar lo que ya sabes del tema de esta secuencia realiza las siguientes actividades. Compara tus respuestas y procedimientos con los de un compañero para asegurar las bases desde las que parten.

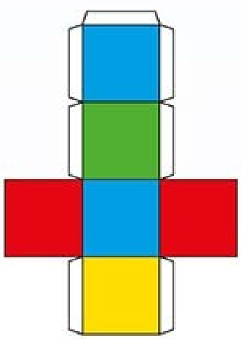
a) Determina mediante una ✔ aquellos experimentos cuyos resultados dependen del azar.

Tirar un lápiz y verificar si se rompe la punta.	
Inflar un globo, dejar que el aire escape y ver en qué dirección sale volando.	
Lanzar tres dados y tomar nota de los puntos en la cara que queda oculta sobre el piso.	
Elegir sin ver una carta de cinco tarjetas idénticas en tamaño y textura numeradas del 0 al 4.	
Alargar un resorte para comprobar su elasticidad.	

b) Dadas las siguientes ruletas, en cuál es más fácil ganar si se elige el color amarillo.



c) Elabora un dado de cuatro colores, como se muestra en la figura. Lánzalo 30 veces; registra la frecuencia de los eventos o sucesos en la tabla de frecuencias, y calcula su probabilidad frecuencial.



Evento o suceso	Frecuencia	Probabilidad frecuencial
Cae		
Cae		
Cae		
Cae		

En concreto

En matemáticas, un *experimento aleatorio* es una acción que se realiza sin saber cuál será el resultado. Por ejemplo, lanzar una moneda, sacar una bola de color de una urna, girar una ruleta, etcétera.

Un *evento* o *suceso aleatorio* es uno de los posibles resultados que se obtienen cuando se lleva a cabo un experimento aleatorio. Por ejemplo, en el caso de lanzar una moneda, hay dos eventos o sucesos: que caiga águila o que caiga sol; en el caso de sacar una bola de color de una urna, los eventos o sucesos serían tantos como bolas de distinto color haya en la urna; para el giro de la ruleta, los eventos dependen de las características de la ruleta, ya sea elegir un color o un número.

La *frecuencia* o *frecuencia absoluta* de un evento aleatorio es el número de veces que éste se repite durante el experimento.

La *probabilidad frecuencial* o *experimental* depende de los resultados de un experimento, y se calcula así:

$$P_f(X) = \frac{\text{número de eventos favorables en el experimento}}{\text{número total de intentos}}$$

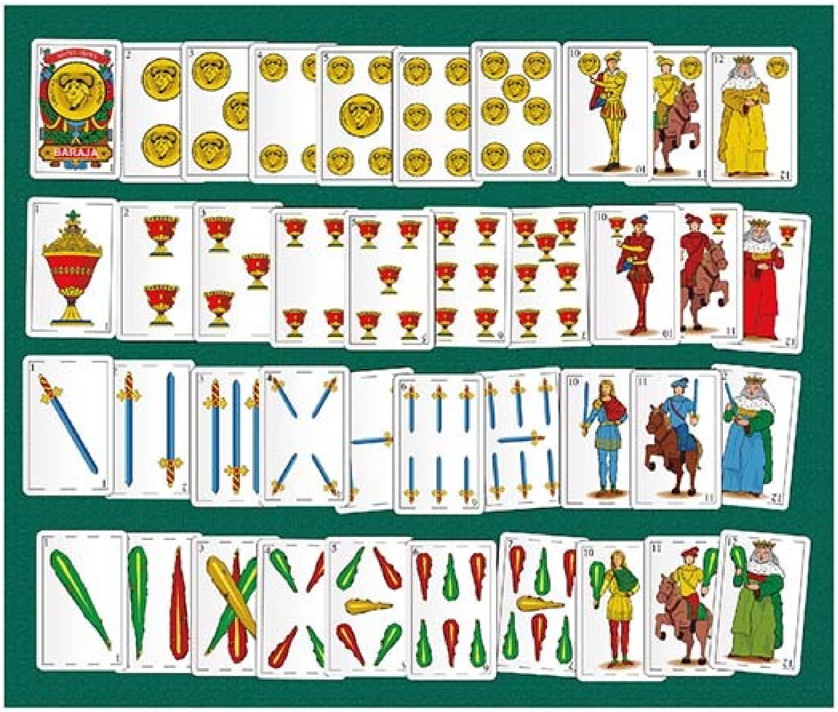
Por ejemplo, si se lanza una moneda tres veces y en dos lanzamientos sale águila, la probabilidad frecuencial del evento "X = Cae águila" es igual a:

$$P_f(X) = \frac{2}{3}$$

Avanza

Diferentes tipos de barajas

La baraja española se presenta a continuación, obsérvala con atención y a partir de ella responde lo que se solicita.



a) ¿Cuántas cartas conforman la baraja española?

b) Los objetos que aparecen se agrupan en cuatro palos: **bastos**, copas, espadas y oros. Trata de identificarlos.

c) Los que sólo tienen un objeto se llaman ases. ¿Cuántos ases tiene la baraja española?

d) ¿En cuántas cartas hay personas? Estas cartas se llaman figuras.

e) Si se extrae una carta de la baraja, ¿cuál sería más fácil obtener, un as o una figura? ¿Por qué?

f) ¿Qué es más fácil al extraer una carta de la baraja, sacar un basto o una copa? Justifica tu respuesta.

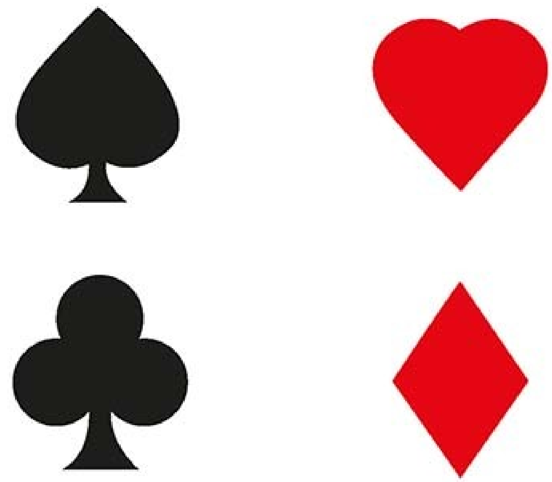
g) Redacta en tu cuaderno dos enunciados sobre extracciones de una carta en la baraja española, utilizando los términos *es más fácil*, *es más difícil*, *es igual de fácil*. Por ejemplo:
"Al extraer una carta de una baraja española, es más difícil obtener un as que una figura, porque sólo hay cuatro ases, pero hay doce figuras".

Compara tus respuestas con un compañero así como la redacción de los enunciados que cada uno planteó, reflexionen si pueden usar el término "probable" en los enunciados y sustenten sus ideas con argumentos claros.

Glosario

basto. Garrote, palo tosco usado como arma.

La baraja inglesa está dividida en cuatro palos (espadas o **picas**, corazones, tréboles y diamantes o rombos), se ilustran a continuación:



Glosario

pica. Tipo de lanza larga que usaban algunos soldados.

sota. En la baraja inglesa representa un sirviente.

De cada palo hay 13 cartas, 9 se identifican con un número (del 2 al 9) y 4 se identifican con una letra (A, J, Q, K), que son conocidas como as, jota o **sota**, reina y rey, respectivamente. Respondan lo que se solicita:

a) ¿Cuántas cartas componen en total la baraja inglesa?
b) Nombren dos diferencias entre esta baraja y la española.
c) ¿Qué es más fácil al extraer una carta de la baraja inglesa, sacar una carta identificada con un número o con una letra?
d) ¿Qué es más difícil al extraer una carta de esta baraja, obtener el as de tréboles u obtener una figura roja?
f) ¿Qué es igual de fácil que sacar una carta de color negro? Justifiquen su respuesta.

Transversalidad

Solicita a tu maestro de Historia te oriente para encontrar documentos confiables en las que puedas conocer más sobre el origen e historia de las barajas.

Elaboren con materiales reciclados una baraja de 40 a 60 cartas (pueden usar números, colores, figuras o una combinación de elementos para identificar cada carta). Úsenla para realizar extracciones, traten de predecir los eventos o sucesos de la experiencia.

Luego, de forma grupal seleccionen una baraja, hagan predicciones sobre los resultados más probables al extraer una carta y pónganlas a prueba realizando extracciones.

Cuando hayan repetido suficientes extracciones determinen las diferencias que existen entre estos experimentos aleatorios y los que realizan en la clase de Ciencias.

Experimentos y probabilidad experimental

Además de las cartas de una baraja, se pueden utilizar otros recursos como monedas, dados, ruletas, bolas en una urna, etc. para realizar experimentos aleatorios.

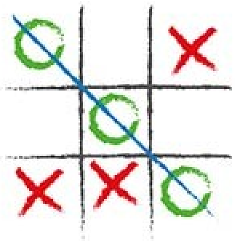
Responde lo que se solicita.

a) ¿Qué otros materiales conoces que puedan utilizarse para realizar experimentos aleatorios? Dibújalos en tu cuaderno o realiza una investigación al respecto.

b) Si no tuvieras una urna y bolas de plástico o de esponja, ¿qué materiales se te ocurren que puedan sustituirlos? Plantea al menos dos opciones para sustituirlos.

c) ¿De qué crees que depende la mayor o menor probabilidad experimental de que ocurra cierto suceso o evento al realizar un experimento aleatorio? Justifica tu respuesta.

d) ¿Cuáles de los siguientes juegos producen experimentos aleatorios? Fundamenta tus elecciones.



gato. Juego entre dos jugadores, quienes marcan los espacios de una retícula de 3×3, de manera alternada, con las formas O y X.

futbolito. Juego en el que dos personas simulan un partido de futbol, controlando unas pequeñas figuras humanas alineadas sobre una mesa o tablero.

dominó. Juego de mesa en el que se usan 28 fichas rectangulares que se van colocando por turnos, según ciertas reglas, y en el que gana quien primero coloca todas sus fichas o quien menos puntos tiene en ellas si se cierra el juego.

tenis de mesa. Juego semejante al tenis, que se practica sobre una mesa, con una pelotita y palas de madera a modo de raquetas.

Comparte con un compañero tus respuestas y propongan ideas para calcular la probabilidad experimental de situaciones que resultan de los experimentos que aquí identificaron, sin necesidad de llevarlos a cabo.

En concreto

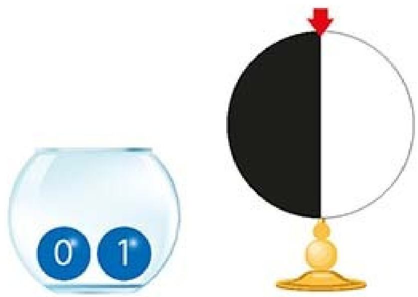
La *probabilidad* determina qué tan viable es que cierta situación ocurra.

Una manera de determinar la probabilidad es considerar los resultados de un experimento, del cual X es un evento, y a partir de ellos calcular el siguiente cociente:

$$P_f(X) = \frac{\text{número de eventos favorables en el experimento}}{\text{número total de intentos}}$$

Lo anterior hace referencia a la probabilidad experimental o probabilidad frecuencial P_f.

Utilicen materiales de reúso para reproducir los siguientes experimentos (ilustrados a continuación): extraer una bola de una urna que tiene dos pelotas idénticas en tamaño, textura y color, pero marcadas con los números 0 y 1, respectivamente; girar una ruleta bicolor (blanco y negro).



Visión matemática

¿Con qué materiales puedes construir un mecanismo giratorio para la ruleta?

Consideren los siguientes eventos:

A = Extraer la bola con el número 0.
B = Extraer la bola con el número 1.
C = La flecha marca el sector blanco.
D = La flecha marca el sector negro.

a) Lleven a cabo los experimentos un total de cien veces (cada uno puede realizar uno de ellos). Calculen la probabilidad frecuencial de los eventos anteriores, según se indica en la siguiente tabla:

		Número de repeticiones			
		10	**20**	**50**	**100**
Probabilidad	$P_f(A)$	$\frac{4}{10}$			
	$P_f(B)$				
	$P_f(C)$				
	$P_f(D)$				

Por ejemplo, al repetir 10 veces el experimento de extraer una bola de la urna, en cuatro ocasiones se extrajo la bola con el número 0, por lo cual $P_f(A) = \frac{4}{10}$.

b) Si tuvieran que escoger alguno de los dos juegos, ¿cuál jugarían y bajo qué condiciones tendrían mayor oportunidad de ganar?, ¿por qué?

Reflexionen si es posible determinar en cuál juego es más probable ganar después de llevar a cabo el experimento cierto número de veces. Tomen nota de las ideas que consideren más relevantes.

Repetir y repetir

Las siguientes tablas muestran los resultados de un experimento hecho por dos personas.

Persona 1	Sol	Sol	Águila	Águila	Sol	Águila	Águila	Sol	Sol	Sol
	Sol	Sol	Águila	Sol	Águila	Águila	Sol	Sol	Sol	Águila

Persona 2	Sol	Águila	Sol	Águila	Sol	Águila	Águila	Sol	Sol	Águila
	Sol	Águila	Sol	Sol	Sol	Sol	Águila	Águila	Águila	Sol
	Águila	Águila	Águila	Águila	Sol	Sol	Águila	Sol	Águila	Sol

a) ¿Qué experimento realizaron?
b) ¿Cuántas repeticiones del experimento realizó la primera persona?
c) ¿Cuántas veces le cayó "Águila"?, ¿cuántas "Sol"?
d) De acuerdo con la respuesta al inciso anterior, en este caso, ¿qué sería más probable, obtener sol o águila? Justifiquen su respuesta.
e) ¿Cuántas repeticiones del experimento realizó la segunda persona?
f) ¿Cuántas veces le cayó "Águila"?, ¿cuántas "Sol"?
g) De acuerdo con la respuesta al inciso anterior, en este caso, ¿qué sería más probable, obtener sol o águila? Justifiquen su respuesta.
h) Ahora consideren que se realizó un solo experimento y los resultados que se obtuvieron surgieron de reunir los resultados de ambos experimentos, ¿cuál sería la frecuencia absoluta del resultado "Águila"?, ¿cuál la de "Sol"?, ¿qué sería más probable en este caso, obtener "Sol" o "Águila"?, ¿por qué? Revisen el concepto de frecuencia absoluta en la página 234.
i) Comparen lo hecho en el inciso anterior con la siguiente tabla que consigna los resultados del experimento de lanzar una moneda, simulado por computadora. Tomen en cuenta que O representa "Sol" y X representa "Águila". ¿Pueden determinar la diferencia entre ambos experimentos?, ¿cómo lo harían?

O	X	O	O	X	X	O	O	X	O
O	O	O	X	X	X	O	X	O	O
X	O	O	O	O	X	X	O	O	O
O	O	O	O	X	X	O	X	O	O
X	X	X	X	X	O	O	X	X	O

En equipos determinen si la probabilidad frecuencial de un evento se modifica al aumentar el número de repeticiones que se realizan del experimento. Busquen una pauta respecto de hacia qué número se aproxima.

Visión matemática

¿De qué manera podrían abreviar las palabras "Águila" y "Sol" para facilitar el registro de los datos?

Para llevar a cabo la siguiente actividad pueden formar equipos de diferente número de integrantes pero se requiere que al menos se realice un total de 100 lanzamientos de un dado por equipo. Cada integrante puede usar un dado o lo pueden realizar con un único dado, pero puede tomar más tiempo completar la actividad.

a) Cada integrante lanza diez veces un dado y lo anota en su cuaderno en una tabla como la siguiente. Anoten en el renglón correspondiente el número que resulta en cada lanzamiento. Observen el ejemplo del registro del primer integrante:

Integrante \ Lanzamiento	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	4	6	4	3	6	5	4	1	1	3
...										

b) Cada integrante debe registrar la frecuencia absoluta para cada uno de los resultados posibles o eventos (1, 2, 3, 4, 5, 6) y con base en ella calculará la probabilidad frecuencial que le corresponde. Usen una tabla como la siguiente:

Experimento. Lanzar 10 veces seguidas un dado		
Resultado posible o evento	Frecuencia absoluta	Probabilidad frecuencial P_f

c) Reúnan los resultados de todos los integrantes y calculen la probabilidad frecuencial de cada evento en este experimento.

d) Ahora, reúnan los resultados de todos los equipos, los cuales deben sumar 500 o más repeticiones del experimento. Realicen más o menos experimentos por integrante para satisfacer estas condiciones. Tienen que calcular la probabilidad frecuencial en tres casos: individual (10 repeticiones), por equipo (de 100 a 150 repeticiones) y grupal (más de 500 repeticiones), de cada evento y consignarlo en la siguiente tabla:

		Número de repeticiones		
		10	100-150	>500
Probabilidad frecuencial	$P_f(1)$	$\frac{2}{10}$		
	$P_f(2)$			
	$P_f(3)$			
	$P_f(4)$			
	$P_f(5)$			
	$P_f(6)$			

Con base en los resultados, determinen hacia qué número se aproxima la probabilidad frecuencial de cada evento cuando aumenta el número de repeticiones que se realizan del experimento. Razonen a qué se debe.

Visión matemática

¿Cuánto tiempo le llevaría a cada uno de ustedes realizar más de 500 lanzamientos de un dado?

Probabilidad teórica

En la actividad anterior, habrán notado que se requirió la participación de los integrantes del grupo para observar que los valores que toma la probabilidad frecuencial de cierto evento, cuando se repite una cantidad considerable de veces un experimento, se van aproximando a un número determinado.

En la práctica, dos caminos que pueden evitar la repetición de gran cantidad de veces el experimento son la predicción de qué debería pasar con el experimento, es decir, sin llevarlo a cabo, y la otra es el uso de simulaciones mediante una computadora.

Cuando se trata de predecir qué debe pasar con el experimento sin necesidad de realizarlo también se puede calcular la probabilidad.

Para realizar las siguientes actividades no es necesario usar material, sólo visualiza lo que se plantea en cada caso.

a) Imagina que metes 9 papelitos azules idénticos en tamaño y textura a una bolsa negra y luego agregas a la bolsa un papelito rojo del mismo tamaño y textura, responde, ¿qué es más probable que obtengas, un papelito azul o uno rojo?, ¿por qué?

b) Ahora se trata de que le des un valor a la probabilidad que identificaste en el inciso anterior, ¿cómo lo harías, cuantitativa o cualitativamente?, ¿por qué? Explica las ventajas y desventajas de cada enfoque.

c) ¿Cuál es la proporción de papelitos azules a rojos?, ¿y de rojos a azules? ¿Consideras que la proporción de colores sería una buena medida para establecer la medida de la probabilidad?, ¿por qué?

d) Imagina que en otra bolsa hay dos papelitos azules y cuatro papelitos rojos, ¿cuál es la proporción de azules a rojos?, ¿sería correcto decir que la probabilidad de obtener un papelito azul es 1/2?, ¿por qué?

e) En el planteamiento original, ¿cuántos papelitos hay en total?, ¿cuántos de esos son rojos?, ¿cuántos son azules? ¿Cómo se puede utilizar esto para definir la probabilidad de un evento?

f) Compara tus respuestas con un compañero y determinen alguna forma en la que puedan calcular la probabilidad de un evento sin necesidad de llevar a cabo el experimento.

Compara tus respuestas con un compañero y determinen alguna forma en la que puedan calcular la probabilidad de un evento sin necesidad de llevar a cabo el experimento.

Visión matemática

La ventaja de usar el pensamiento matemático es que permite comprender conceptos abstractos y las relaciones entre ellos. Cuándo te enfrentes a un problema, la pregunta "¿Qué pasaría sí…?" te permitirá desarrollar tu pensamiento lógico y matemático.

Necesitan una moneda para realizar una serie de volados, respondan en su cuaderno lo que se solicita en cada caso.

a) Antes de realizar los volados, cada uno anticipe los resultados de 10 lanzamientos. Completen la siguiente tabla:

# volado	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Resultados A										
Resultados B										

b) Con base en sus predicciones calculen la probabilidad de los eventos, "cae águila" o "cae sol", con la siguiente expresión, donde $P(E)$ denota la probabilidad del evento E:

$$P(E) = \frac{\text{Número de resultados favorables del evento}}{\text{Número total de resultados}}$$

c) Ahora cada uno efectúe 10 volados, llenen una tabla similar a la anterior.

d) Con base en los resultados del inciso anterior, calculen la probabilidad de cada uno de los resultados posibles con la fórmula de la probabilidad experimental:

$$P_f(E) = \frac{\text{Número de resultados favorables en el experimento}}{\text{Número total de repeticiones del experimento}}$$

e) Comparen la probabilidad de los resultados anticipados con los reales y respondan:

- ¿Por qué deben usarse dos fórmulas distintas para calcular las probabilidades?
- ¿Qué sucedió?, ¿las probabilidades arrojan valores similares?
- ¿Qué anticiparon como el resultado más probable, águila o sol?, ¿qué resultó?
- ¿Qué esperan que pase con la probabilidad de los eventos si se repite un número suficiente de veces el experimento? Justifiquen su respuesta.

f) Luego, cada uno lance una serie de 100 volados y calcule las probabilidades de cada resultado posible. Comparen los valores de las probabilidades con los obtenidos durante 10 lanzamientos, ¿qué observan?

Reúnanse con otras parejas para comparar sus respuestas y discutan la relación que debe existir entre las fórmulas propuestas para el cálculo de la probabilidad así como los casos en los que se usa una u otra.

En concreto

Otra forma de calcular la probabilidad de un evento consiste en prever y analizar lo que ocurre con los eventos de un experimento aleatorio. Por ejemplo, no es necesario lanzar un dado para prever que únicamente hay seis resultados posibles y que en un solo lanzamiento no pueden ocurrir simultáneamente dos de ellos.

Si todos los eventos tienen la misma probabilidad de ocurrir, entonces se puede calcular la probabilidad teórica o clásica $P(X)$ con la expresión:

$$P(X) = \frac{\text{número de resultados favorables del evento}}{\text{número total de resultados}}$$

Ejemplo:
El experimento consiste en lanzar un dado una vez. En total, se pueden obtener seis resultados posibles o eventos: 1, 2, 3, 4, 5 o 6. Bajo el supuesto de que el dado no está alterado, todos los eventos tienen la misma probabilidad de ocurrir. Por lo tanto, la probabilidad de "X = Obtener 2" es:

$$P(X) = \frac{\text{número de resultados favorables del evento}}{\text{número total de resultados}} = 16$$

Simulaciones por computadora

Hay muchas situaciones en las que no es posible realizar experimentos por lo que su probabilidad teórica no puede ser contrastada con la experimental, en algunos casos se debe recurrir a simularlas mediante equipo y programas de cómputo.

Considera la siguiente tabla que expone los resultados de la simulación de 100 lanzamientos de un dado.

1	3	3	1	3	6	5	5	5	2
3	6	2	1	2	2	2	5	3	2
4	3	4	4	5	1	6	1	2	3
6	6	5	3	5	5	6	2	5	2
4	1	2	5	5	6	5	1	6	2
3	5	3	3	5	4	5	1	6	4
2	1	4	6	1	6	1	5	5	1
6	6	5	2	3	4	4	5	1	4
2	3	1	6	2	4	3	5	6	6
6	2	4	2	3	1	2	6	3	6

Responde lo que se solicita a continuación:

a) ¿Cuál es la probabilidad teórica del evento "Obtener un 2"?

b) ¿Cuál es la probabilidad experimental del evento "Obtener un 2" simulado por la computadora?

c) ¿A qué atribuyes la diferencia en los valores de las probabilidades teórica o experimental? Justifica tu respuesta.

d) ¿Si la computadora hubiera simulado 200 lanzamientos del dado, las probabilidades teórica y experimental serían más parecidas?, ¿por qué?, ¿y si se simulan 1000 lanzamientos, qué pasaría?

e) Considera los siguientes resultados generados por la simulación de una computadora: 9, 4, 11, 7, 12, 5, 1, 6, 1, 5, 9, 2, 5, 9, 4, 7, 2, 7, 6, 1, 6, 3, 1, 8, 4, 9, 11, 8, 9, 11, 13, 11, 10, 11, 13, 12, 10, 2, 3, 4, 4, 2, 11, 6, 10, 8, 12, 4, 5, 8. ¿Qué experimento crees que fue recreado?

e) Considerando los resultados de la simulación en el inciso anterior calcula las probabilidades siguientes y contrástalas con las probabilidades teóricas:

- $P_f(8)$
- $P_f(1 \text{ o } 13)$
- $P_f(\text{Impar})$
- $P_f(\text{Mayor a } 10)$

Compara tus respuestas con un compañero, propongan ideas por las cuales las probabilidades teóricas y experimentales difieren y cómo a partir de la magnitud de su diferencia se pueden encontrar fallas en la realización de los experimentos.

En concreto

En matemáticas, y más específicamente en programación, una simulación permite replicar un proceso de forma aparente y controlada de tal manera que se pueda estudiar sin necesidad gastar o invertir demasiado en recursos materiales o humanos que se utilizarían durante su ejecución en la vida real.

Visión matemática

¿Qué conocimientos consideras que se necesitan para programar una computadora que puede simular experimentos aleatorios? Si el tema te causa curiosidad investiga al respecto.

Estimación de la probabilidad a partir de un histograma

Hay otras maneras de calcular probabilidades, a través de histogramas, aunque cabe aclarar que en realidad de esta manera no se calcula la probabilidad teórica y tampoco la experimental porque no se llevan a cabo experimentos, más bien se trata de una aproximación con base en la idea de que la probabilidad es un número que determina la razón que guarda el número de resultados favorables entre el número total de los mismos.

Corrijo y aprendo

Practica el cálculo de probabilidades, para ello accede a la siguiente dirección https://www.thatquiz.org/es-d/matematicas/probabilidad/ y realiza el test. En la parte superior izquierda con la lista desplegable "Largo" puedes modificar la cantidad de ejercicios, selecciona el nivel de dificultad de 1 a 5 y establece un tiempo límite para responder de hasta 30 minutos.

Resuelve diferentes tipos de problemas dependiendo el nivel que selecciones.

Al final, se arroja tu resultado, corrige las respuestas incorrectas en tu cuaderno.

Lean con atención la siguiente situación y den respuesta a lo que se solicita.

Claudia desea comprar una batería para su automóvil, por lo que investigó la duración en años de diferentes baterías. Preguntó a otros automovilistas y a dueños de talleres mecánicos y organizó los datos en la siguiente tabla:

Intervalo de duración (años)	Número de baterías
2-2.5	2
2.5-3	1
3-3.5	15
3.5-4	10
4-4.5	5
4.5-5	3

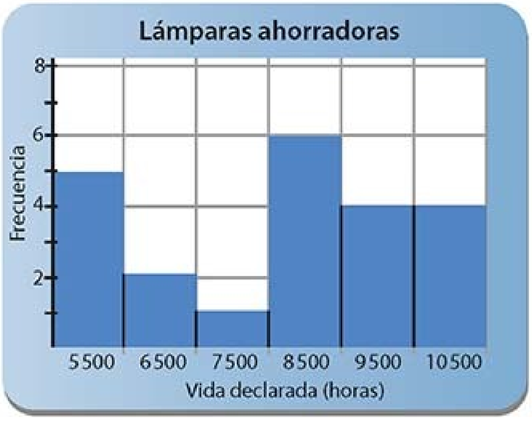
a) ¿Cuál es la mínima duración de una batería de automóvil según los datos recolectados por Claudia?
b) Si un automovilista respondió que una batería le duró 2 años con 8 meses, ¿en qué intervalo lo consideró Claudia?
c) ¿A cuántas personas preguntó Claudia?
d) ¿A cuántas de ellas la batería les duró entre 4 y 4.5 años?
e) Considerando las dos respuestas a los incisos anteriores, ¿cuál es la probabilidad de que si Claudia compra una batería, ésta le dure entre 4 y 4.5 años? Justifiquen su respuesta.
f) ¿Cuál sería la probabilidad de que a Claudia la batería le dure menos de 3 años?, ¿por qué?
g) Además del uso que se le dé al automóvil, ¿qué otras causas crees que afectan la duración de la batería?
h) ¿Qué debería hacer Claudia para tener mayor certeza sobre la duración de una batería cualquiera y poder realizar una compra inteligente?

Comparen sus respuestas con otras parejas, piensen si ésta es una forma válida de calcular la probabilidad de un evento en la que además del azar intervienen otras variables y discutan sobre ello. Tomen nota de lo que consideren más importante.

Visión matemática

¿Cómo puedes usar las medidas de tendencia central para analizar con mayor detalle los datos de la tabla?

Observen con atención el siguiente histograma y den respuesta a lo que se solicita.



***a*)** ¿Cuáles son los rangos de duración que se consideraron de las lámparas ahorradoras?, ¿cómo lo saben?

***b*)** ¿Cuál es la vida declarada en el empaque de las lámparas cuya frecuencia es mayor?, ¿cuál es la menor?

***c*)** ¿Cuántas lámparas ahorradoras fueron consideradas en la recolección de datos?

***d*)** Del total de lámparas consideradas, ¿cuántas presentaron una duración mayor o igual a 10 000 horas?

***e*)** Determinen un procedimiento para encontrar la media de los datos recolectados a partir del histograma, ¿cuál sería en este caso el promedio de vida declarada de las lámparas que se consideraron?

***f*)** ¿Cuál es una estimación de la probabilidad de que al comprar una lámpara ahorradora, ésta dure más que el promedio de la vida declarada? Justifiquen su respuesta.

***g*)** ¿Cuál es la estimación de la probabilidad de que al comprar una lámpara ahorradora, ésta tenga una duración menor a 6 000 horas?

En plenaria, reflexionen sobre cómo pueden analizar un histograma para extraer de él no sólo algunas medidas de tendencia central sino la probabilidad de ciertos eventos. La idea no es que detallen los procedimientos que deben seguir sino que analicen por qué esa información está representada en el gráfico.

Visión matemática

¿Para qué te puede ser útil la información que estás analizando aquí?

Enl@ce

Utiliza el simulador disponible en el siguiente enlace **https://phet.colorado.edu/sims/html/plinko-probability/latest/plinko-probability_es.html** para realizar experimentos aleatorios. Describe en tu cuaderno en qué consisten los experimentos y la función de los botones que aparecen en la pantalla. También determina la probabilidad teórica y experimental, cuando repites varias veces el experimento, del evento que elijas.

Revisa cada una de las situaciones que se plantean y da respuesta a lo que se solicita.

Los siguientes datos representan el periodo de vida, en segundos, de 50 mosquitos que fueron sujetos de prueba de un nuevo insecticida en un experimento controlado de laboratorio.

17	20	10	9	23	13	12	19	18	24
12	14	6	9	13	6	7	10	13	7
16	18	8	13	3	32	9	7	10	11
13	7	18	7	1	4	27	19	16	8
7	10	5	14	15	10	9	6	7	15

a) A partir de los datos traza un histograma, recuerda utilizar un número adecuado de intervalos.

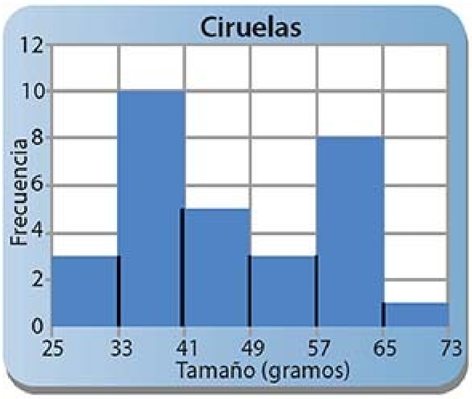
b) Identifica el promedio de vida de los mosquitos después de que son rociados con el insecticida así como una estimación de la probabilidad del evento "El mosquito muere en menos de 15 segundos".

c) A partir de lo anterior determina si el **eslogan** del insecticida: "Mata mosquitos al instante" resulta adecuado.

Glosario

eslogan. Frase breve y atrayente muy usada en la publicidad.

El siguiente histograma representa el peso en gramos de una muestra de 40 ciruelas que se utilizó para realizar una inspección de calidad:



Biblioteca

En el libro *50 cosas que hay que saber de matemáticas* de Tony Crilly conocerás cómo se ha desarrollado la teoría de la probabilidad usando tres afirmaciones que se consideran evidentes. También puedes buscar otros libros sobre el tema *Probabilidad* en la biblioteca.

a) ¿Cuál es el peso promedio de una ciruela de la muestra?

b) Si se elige una ciruela al azar del mismo lote del que se tomó la muestra, ¿es posible calcular la probabilidad de que ésta pese menos que el peso promedio?, ¿cuál consideras que debería ser el valor de esa probabilidad? Justifica tu respuesta.

c) ¿Cuál es la probabilidad de que pese menos de 40 gramos?, ¿y más de 50 gramos? ¿Hay alguna relación entre estos resultados y las respuestas al inciso anterior? Justifica tu respuesta.

Contrasta tus respuestas, tus procedimientos y la construcción de tu histograma con uno de tus compañeros. Propongan otro problema similar a éstos, usen datos que recopilen sobre alguna situación de la que deseen conocer más al respecto.

πensa

Consolida tu aprendizaje al resolver las siguientes actividades, escribe las respuestas en tu cuaderno.

a) En las siguientes situaciones, ¿quién tiene mayores probabilidades de ganar? Justifica tu respuesta.

- Óscar que elige un cuatro rojo al extraer una carta de una baraja inglesa.
- Miriam que elige extraer 1 bola blanca de una urna que tiene 50 bolas en total, 48 son negras y sólo hay dos blancas.
- Manuel que elige sólo una de las divisiones de una ruleta segmentada en 64 partes iguales.

b) Reflexiona sobre el siguiente enunciado matemático:

> **Ley de los grandes números**
> Cuando el número de repeticiones de un experimento aleatorio es considerablemente elevado, la frecuencia relativa del suceso asociado acerca cada vez más y más hacia un cierto valor, éste recibe el nombre de probabilidad del suceso.

¿Qué dice?, ¿qué implica?, ¿por qué es una ley?, ¿cómo se comprueba?, ¿a qué tipo de probabilidad hace referencia?

c) Redacta un problema que pueda ser adecuado para la siguiente colección de datos obtenidos por medio de una simulación por computadora.

2	1	1	1	1
2	3	3	1	1
1	2	1	3	2
3	2	2	2	1
3	1	2	1	2
3	1	1	2	1
2	3	1	1	3
3	3	1	2	3
2	3	2	1	1
3	2	1	3	3

Es muy importante que al revisar las respuestas de esta sección en el grupo prevalezca un ambiente de respeto donde todos pueden opinar con argumentos bien sustentados.

Pruébate

Selecciona la respuesta correcta para cada pregunta.

1. ¿Cuántos resultados son posibles si se lanza un dado cúbico en el que todas sus caras tienen una marca diferente?

   a) 3 ***c)*** 2^3

   b) 6 ***d)*** 3^2

2. ¿Cuál es la probabilidad experimental del evento "Obtener un □" si la simulación por computadora arrojó los siguientes resultados?

□	○	×	□	□	○	○	□	×	○
□	×	□	×	□	○	×	×	○	×

   a) 0.4 ***c)*** 0.35

   b) $\frac{3}{10}$ ***d)*** $\frac{9}{20}$

3. ¿Cuál de los siguientes resultados no es posible en el experimento que consiste en extraer una carta de una baraja inglesa?

   a) Obtener una carta con el número 11
   b) Obtener el as de tréboles
   c) Obtener una carta roja
   d) Obtener el 5 de espadas negro

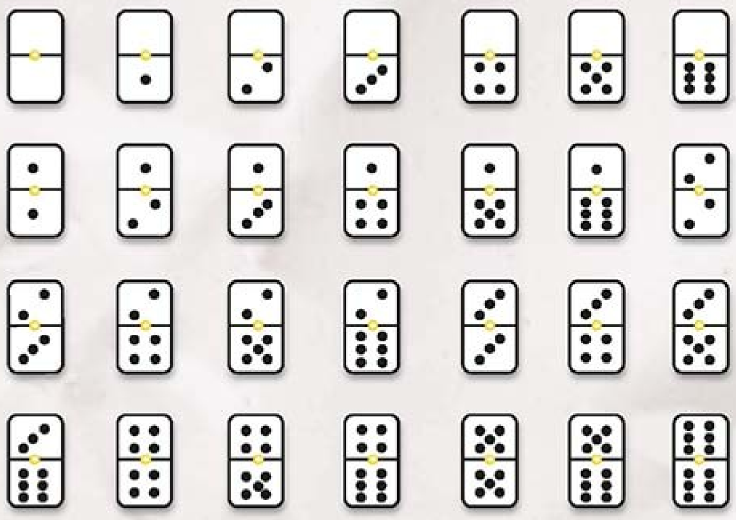
Corrijo y aprendo

Los métodos empleados para responder estas preguntas pueden ser diferentes pero la respuesta es la que debe coincidir.

4. Considera el juego de dominó que se ilustra a continuación. ¿Cuál es la probabilidad de que al tomar una ficha al azar, la suma de sus puntos sea cinco?

   a) $\frac{1}{28}$ ***c)*** $\frac{1}{7}$

   b) $\frac{3}{14}$ ***d)*** $\frac{3}{28}$



Autoevaluación

Completa en este espacio o en tu cuaderno las siguientes oraciones con la finalidad de reflexionar y valorar tu proceso de aprendizaje.

- La secuencia didáctica que más me gustó fue … porque …
- La secuencia didáctica que más se me dificultó fue… porque …
- El tema sobre el que más me gustaría investigar es…
- Entre las muchas cosas que aprendí…
- Participé en las actividades…
- Durante el desarrollo de las actividades me sentí…
- Soy capaz de resolver…

Coevaluación

Intercambia tu libro con un compañero para que de forma crítica y responsable te evalúe.
Marca mediante una ✔ las celdas que señalen el desempeño de tu compañero en cuanto a las **habilidades**, los **valores** y las **actitudes** que muestra durante el trabajo en el aula. Devuelve su libro a tu compañero para que observe su desempeño. Añade una o dos sugerencias constructivas para que pueda mejorar sus puntos débiles.

Piensa de forma crítica	Es honesto	Participa activamente
Piensa de forma creativa	Es responsable	Es innovador
Identifica y resuelve problemas	Es perseverante	Escucha con atención
Aprende de forma autónoma	Es solidario	Busca el diálogo

Heteroevaluación

Pide a tu profesor que comparta contigo la respuesta a las siguientes preguntas que te pueden orientar para conducir tu proceso de aprendizaje a un mejor término.

- ¿Cuál sería su valoración del cumplimiento de las metas de aprendizaje a partir de los resultados obtenidos por el estudiante?
- Mencione la secuencia didáctica que el estudiante debe repasar para lograr un mejor entendimiento de la misma.
- Mencione dos aspectos que el estudiante debe mejorar para aprovechar al máximo el tiempo de la clase.

Competencias lectora y matemática

Lee con atención el texto de esta página y responde las preguntas que aparecen en la siguiente.

La trampa más común

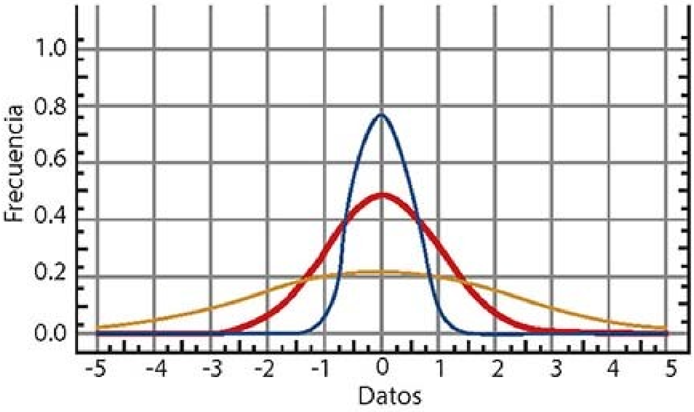
¿Alguna vez leíste una frase como "En promedio, los ingleses beben tres tazas de té al día"? ¿No te parece extraño? ¿Quiénes son los ingleses promedio? Malas noticias: nunca irás por la calle y te encontrarás con el o los ingleses comunes. Algunos prefieren el café, otros la leche, y algunos no beben. Entonces, ¿a quién se le ocurrió esa frase?

La gente que se dedica a ese tipo de estadísticas generalmente obtiene esos datos de cifras **colosales**. Por ejemplo, en Reino Unido se consumen 60 000 000 000 de tazas de té al año. Entonces simplemente dividen esa cantidad entre el número de días que tiene el año, y después entre el número total de personas. ¿Eso quiere decir que todas las personas gastan lo mismo en bebidas? La respuesta es un rotundo no. En realidad quiere decir que algunas personas gastan más y otras menos por lo que la media no es la medida indicada en este caso, sólo funciona si los datos recabados tienen una distribución normal (una forma conocida como campana de Gauss).

Glosario

colosal. Inmenso, enorme, muy grande.

El siguiente gráfico muestra tres tipos diferentes de distribución normal con la misma media o promedio. Sin embargo, son claramente diferentes. Lo que el promedio no determina es el rango de los datos.



La mayoría de las veces los datos recolectados no se distribuyen de forma normal. Por ejemplo, cuando las estadísticas se refieren a salarios (un tema frecuentemente reportado), se declara que la mitad de las personas gana menos y que la otra mitad gana más. Esto está mal. En la mayoría de los países, la gente recibe menos salario que la media o promedio. Esto se debe a que los salarios no siguen una distribución normal, muestran un pico en ciertos salarios y después más bien tienden a la baja.

Adaptado de: https://es.schoolofdata.org/errores-comunes/
(Consultado el 12 de junio de 2018).

Lee con atención el texto y subraya la respuesta correcta.

1. ¿Qué tipo de gráfico ilustra el texto anterior?

   a) Gráfico de barras
   b) Gráfico de líneas
   c) Gráfico circular
   d) Histograma

2. De acuerdo con la información del texto, ¿cuál es una deficiencia de la media de un conjunto de datos?

   a) No informa sobre el rango de los datos
   b) Varía si hay un dato extremo
   c) No indica nada sobre la mediana o la moda
   d) Sólo sirve si la distribución de datos no es normal

3. Según el autor del texto, ¿quiénes son los ingleses promedio?

   a) Los que prefieren el vino
   b) Los que beben cerveza
   c) Los que no consumen bebidas alcohólicas
   d) No existen, lo que existe es una diversidad de ingleses

4. ¿Por qué la media no es adecuada para representar los datos referentes al ingreso salarial de una población?

   a) Porque no representa a los que ganan menos
   b) Porque sólo representa a los que más ganan
   c) Porque representa el promedio de unos cuantos, no de todos
   d) Porque la dispersión de los sueldos es considerable

5. ¿Qué tipo de dato sí puede ser representado por la media?

   a) La edad de los estudiantes de un grupo de segundo de secundaria
   b) El salario de un trabajador en una **empresa transnacional**
   c) El gasto de los mexicanos en agua potable
   d) La estatura de los estudiantes de una escuela primaria

6. De acuerdo con el autor, ¿por qué las estadísticas "promedio" no suelen ser exactas?

Glosario

empresa transnacional. Aquélla que tiene presencia en varios países.

7. Busca en revistas, periódicos o internet una frase o noticia similar a la que aparece al principio del texto y pégala o transcríbela en el siguiente espacio. Mediante el pensamiento y conceptos matemáticos haz un análisis de la información que presenta, por ejemplo, ¿cuál es su fuente?, ¿usaron gráficos adecuados para representarlos?, ¿los datos fueron sacados de contexto?

Noticia

Análisis

Proyecto 3 Matemáticas y salud

Presentación

La estadística como rama de las matemáticas es útil para procesar y analizar datos así como entender las relaciones entre ellos y sus implicaciones. El origen de la disciplina se remonta a la necesidad de contar con datos fiables de las características poblacionales de tal manera que procesos como el pago de impuestos o la prestación de servicios públicos se realice de forma eficiente.

En este proyecto tendrán que desarrollar habilidades, actitudes y valores que les permitan aplicar los conceptos matemáticos que aprendieron en este bloque en beneficio de la salud de su comunidad o localidad.

Planeación

Durante esta fase del proyecto deben establecer los objetivos, los productos, los recursos, las actividades y las formas de evaluación del proyecto.

Algunos temas que pueden interesarles son:

- Ocio y uso del tiempo libre en los adolescentes
- La práctica deportiva en la edad escolar
- El Índice de Masa Corporal (IMC) como indicador de la obesidad

¿Cuál les genera más interés? Consideren otros temas más adecuados a sus gustos o necesidades.

Para iniciar su investigación pueden consultar los resultados del Módulo de Práctica Deportiva y Ejercicio Físico (MOPRADEF) que genera información estadística sobre los hábitos referentes a la práctica deportiva en hombres y mujeres de más de 18 años.

Utilicen la información como guía para diseñar encuestas, cuestionarios o entrevistas que les permitan recopilar datos similares en la comunidad escolar, colonia o barrio.

Utilicen un organizador como el siguiente para regular cada fase del proyecto.

Actividades	Responsables	Recursos y tiempo estimado

Enl@ce

Consulten un comunicado que resume los resultados del MOPRADEF realizado en noviembre de 2017 en el siguiente enlace http://www.beta.inegi.org.mx/contenidos/saladeprensa/boletines/2018/mopradef/mopradef2018_01.pdf (Consulta: 13 de junio de 2018).

Desarrollo

Para recabar más información acudan personalmente a una clínica, hospital, centro de salud o dispensario médico cercano para obtener datos primarios a partir de entrevistas u observación de los pacientes o consulten las bases de datos de organismos e instituciones de salud que se encargan de elaborar estadísticas oficiales o documentación diversa, por ejemplo, el Inegi o la Organización Mundial de la Salud (OMS) de los que pueden obtener informes o reportes.

INEGI

INSTITUTO NACIONAL DE ESTADÍSTICA Y GEOGRAFÍA

IMSS

Organización Mundial de la Salud

Validen la información recabada y procésenla siguiendo algunas de las técnicas o procedimientos que aprendieron durante este bloque. Por ejemplo, construyan tablas de frecuencias, tracen histogramas, calculen las medidas de tendencia central y las medidas de dispersión, etcétera.

Visión matemática

¿Qué tipo de gráfico utilizarías para mostrar cuál es el consumo de agua simple en la comunidad?

Organicen y plasmen los resultados de su investigación en un reporte por escrito que deberán entregar a su profesor para su valoración y de ser posible utilicen recursos tecnológicos para presentar los resultados de su investigación a la comunidad escolar o a los pobladores de su localidad. Por ejemplo, podrían realizar una presentación pública mediante diapositivas o diseñar una infografía y compartirla a través de redes sociales.

Incluyan las tablas y gráficos que hayan elaborado para ilustrar y hacer más entendibles los datos. No olviden destacar la importancia de los conceptos y del lenguaje matemático que utilizaron para procesar y analizar los datos.

Den un repaso y valoren la organización y cumplimiento de las actividades que desarrollaron durante todo el proceso para que puedan mejorar en un próximo proyecto.

Planteen otras preguntas respecto al tema que investigaron y piensen si pueden ahondar en el tema, utilizar distintas estrategias para abordarlo o buscar otras alternativas del tema a investigar.

Obtengan conclusiones de los resultados obtenidos y pregúntense cómo pueden utilizarlos para implementar un programa de activación física que ayude a mejorar la salud y calidad de vida de los miembros de su comunidad.

Comunicación

Transversalidad

Busquen la orientación del profesor de Educación Física para diseñar un programa de ejercicios o un plan de alimentación que pueda ser implementado en la comunidad objetivo del proyecto.

Evaluación

Bibliografía consultada para el desarrollo de la obra

Ayala Izaguirre, Marcelo, *Algunas prácticas cuestionables en la docencia*, México, Universidad Iberoamericana Puebla, 2010.

Ayala Izaguirre, Marcelo, *Sugerencias para aprovechar las dos horas de clase*, México, Universidad Iberoamericana Puebla, 2005.

Dabdoub Alvarado, Lilian, *La creatividad y el aprendizaje: cómo lograr una enseñanza creativa*, México, Limusa, 2014.

Dryden, Gordon y Jeannette Vos, *La revolución del aprendizaje. Para cambiar la manera en que piensa el mundo*, México, Grupo Editorial Tomo, 2012.

Durán, Valencia, *La educación diferenciada: La propuesta de Carol Ann Tomlinson*, México, Limusa (Formación y Práctica Pedagógica).

Fernández Lomelín, Ana Graciela, *Recursos didácticos: elementos indispensables para facilitar el aprendizaje*, México, Limusa, 2015 (Formación y Práctica Pedagógica).

Forbes, Richard, *Crear soluciones. La caja de herramientas*, México, Grupo Editorial Tomo, 2007.

García Córdoba, Fernando, *Autogestión del aprendizaje*, México, Limusa, 2015.

Gutiérrez, María Arcelia, *Inteligencias múltiples: Yo soy inteligente, tú eres inteligentes, ¿todos somos inteligentes?*, México, Limusa, 2012 (Formación y Práctica Pedagógica).

Lemov, Doug, *Enseña como un campeón: 49 técnicas de enseñanza para colocar a tus alumnos en la ruta del éxito*, México, Limusa, 2014.

Valero Borrás, Vida y Gabriela Cortés Sánchez, *Aprender a aprender*, México, Universidad Autónoma Metropolitana (UAM), 2013.

Webgrafía consultada para el desarrollo de la obra

Alarcón Bortolussi *et al.*, *Libro para el maestro. Matemáticas. Educación secundaria*, México, SEP, 2004, disponible en: https://www.uv.mx/personal/grihernandez/files/2011/04/libromaestro.pdf

Alicia Ávila y García Peña, Silvia, *Los decimales: más que una escritura*, Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE), México, 2008 (Materiales para apoyar la práctica educativa), disponible en: http://www.setab.gob.mx/php/edu_basica/eimle/doctos/MAPE.pdf

Catálogo de libros de texto gratuitos. SEP. http://libros.conaliteg.gob.mx/content/common/consulta-libros-gb/

García Peña, Silvia y Olga Leticia López Escudero, *La enseñanza de la Geometría*, México, Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE), 2008 (Materiales para apoyar la práctica educativa), disponible en: http://www.inee.edu.mx/mape/themes/TemaInee/Documentos/mapes/geometriacompletoa.pdf

García, Silvia, *Sentido numérico*, México, Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE), 2014 (Materiales para apoyar la práctica educativa), disponible en: http://publicaciones.inee.edu.mx/buscadorPub/P1/D/416/P1D416.pdf

Guía de Evaluación Formativa, Agencia de Calidad de la Educación, Santiago de Chile, 2016, disponible en: http://www.evaluacionformativa.cl/wp-content/uploads/2016/06/Gu%C3%ADa_Evaluaci%C3%B3n_Formativa.pdf

Juan D. Godino *et al.*, *Didáctica de las matemáticas para maestros*, Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada, Granada, España, 2004, disponible en: http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/9_didactica_maestros.pdf

Libros del Rincón. SEP. http://www.librosdelrincon.sep.gob.mx/

María Teresa Adriana Fonseca Cárdenas *et al.*, *PISA en el aula: Matemáticas*, México, Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE), 2008 (Materiales para apoyar la práctica educativa), disponible en: http://publicaciones.inee.edu.mx/buscadorPub/P1/D/409/P1D409.pdf

Miriam Chacón Calderón y Valarezo Loaiza, Miguel, *Didáctica de las matemáticas*, Ministerio de Educación del Ecuador, Quito, Ecuador, 2011, disponible en: https://educacion.gob.ec/wp-content/uploads/downloads/2013/03/SiProfe-Didactica-Matematicas.pdf

Bibliografía sugerida al alumno

Cerasoli, Anna, *La sorpresa de los números. Un viaje al fascinante universo de las matemáticas*, Madrid, Maeva, 2009.

Cottin, Menena, *La doble historia de un vaso de leche*, Ediciones Tecolote, México, 2007.

Crilli, Tony, *50 cosas que hay que saber sobre matemáticas*, Ariel, Barcelona, 2014.

Enzensberger, Hans, *El diablo de los números. Un libro para todos aquellos que temen a las Matemáticas*, México, SEP-Colofón-Ediciones Siruela, 2016.

Guedj, Denis, *El imperio de los números*, México, Art Blume, 2011.

Jiménez, Douglas, *Matemáticos que cambiaron al mundo. Vidas de genios del número y la forma que fueron famosos y dejaron huella en la historia*, Providencia, Chile, Tajamar Editores, 2010 (Libros del Rincón).

Ko, Seokku, *Matemáticas asombrosas de matemáticos excéntricos*, México, SEP-Ediciones Castillo, 2009.

Moscovich, Ivan, *Brainmatics: Rompecabezas lógicos*, México, SEP-Tandam Verlag GmbH-Distribuidora Marin, 2013.

Noreña Villarías, Francisco y Juan Tonda Mazón, *La medición y sus unidades*, México, SEP-Santillana, 2003.

Río, Jesús Antonio del, *et al.*, *Las nanoaventuras del maestro Fonseca*, México, SEP-ABDO Producciones, 2013 (Libros del Rincón).

Rodríguez Herrera, Daniel, *Ceros y unos*, Madrid, Ciudadela Libros, 2011.

Serena Domingo, Pedro A., *Nanotecnología*, Madrid, CSIC-Los Libros de la Catarata, 2010.

Tahan, Malba, *El hombre que calculaba*, México, Limusa, 2013.

Webgrafía sugerida al alumno

Educaplay: https://es.educaplay.com/

Ejercicios de Matemáticas: https://www.ematematicas.net/

El tanque matemático: http://www.eltanquematematico.es/

Escolar: http://www.escolar.com/menumate.htm

GCFAprendeLibre: https://www.gcfaprendelibre.org/matematicas/index.do

Khan Academy en español: https://es.khanacademy.org/math

Profesor en línea: http://www.profesorenlinea.cl/

Proyecto Newton. Matemáticas para la vida: http://www3.gobiernodecanarias.org/medusa/edublogs/proyectonewton/category/principal/

Thatquiz: https://www.thatquiz.org/es/

Créditos iconográficos

Banco de imágenes

© 123rf: pp. 10-11, 15, 18, 40, 44, 53 (arr.), 59 (ab.), 67, 85, 89, 91, 92 (arr.), 92 (ab.), 96 (arr.), 102, 104-105, 106, 117 (arr.), 117 (ab.), 118, 124, 125, 135 (ab.), 137, 194 (izq.), 194 (centro), 194 (der.), 196-197, 199 (centro), 214, 215 (arr.), 221 (centro izq.), 221 (centro der.), 224, 241, 249, 254, 255.

Ilustraciones

© Archivo editorial: pp. 12, 13, 23, 28, 29, 45, 46, 47, 58, 65, 72, 76, 77, 80, 81, 84, 87 (izq.), 87 (der.), 98, 100 (ab. izq.), 110, 117 (arr.), 120, 130, 131, 134, 135 (arr.), 142, 150 (arr.), 153, 154, 155, 159, 160, 161, 164, 166, 167, 169, 170, 173, 179 (centro), 179 (ab.), 183, 184 (ab.), 186 (ab.), 190 (ab.), 191 (arr.), 191 (ab.), 198 (arr.), 203 (arr.), 206, 215 (centro), 215 (ab.), 223, 224 (ab.), 225 (arr.), 227, 230 (arr.), 230 (centro), 230 (ab.), 231 (arr. izq.), 231 (arr. der.), 231 (ab. izq.), 231 (ab. der.), 232 (arr.), 232 (ab.), 233 (arr.), 233 (ab.), 234, 236, 237, 238 (arr.), 238 (ab.), 239, 242, 245 (arr.), 248 (arr.), 248 (centro), 248 (ab.), 254.

Matemáticas 2

A través de las matemáticas

Matemáticas 2, A través de las Matemáticas, presenta una nueva manera de enseñar y aprender esta disciplina. Cada uno de los elementos que forman parte del libro trabaja en conjunto con los demás para explorar, descubrir y construir el conocimiento matemático a partir de la experiencia, lo cual permite utilizar este lenguaje formal como una herramienta más de comunicación.

Esta obra se elaboró tomando en cuenta que el conocimiento de cualquier materia no está aislado de la realidad, por lo que uno de sus propósitos principales es desarrollar habilidades, actitudes y valores como el pensamiento crítico, la escucha activa, la apertura al diálogo, la responsabilidad y la honestidad, entre otros.

Así, cada secuencia didáctica incluye actividades cuya realización exige diversas destrezas, como recordar, comprender, aplicar y evaluar información, con la intención de que los estudiantes desarrollen soluciones creativas a los problemas y, al mismo tiempo, regulen su propio proceso de aprendizaje a partir de la colaboración y la interacción con los otros, compartiendo y comparando respuestas, procedimientos y propuestas.

Finalmente, entre otras innovaciones, se proponen tres proyectos que se pueden llevar a cabo a lo largo del ciclo escolar empleando el conocimiento recién adquirido, para demostrar que es posible utilizar las Matemáticas para resolver problemas prácticos, de la vida cotidiana.

www.fernandezeditores.com.mx
www.social.adiactiva.com.mx

S00457

DISTRIBUCIÓN GRATUITA
PROHIBIDA SU VENTA

FERNÁNDEZ editores